МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ДГТУ)

Факультет «Автоматизация, мехатроника и управление»
Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

«Теория колебаний»

Конспект лекций

Ростов-на-Дону
2022

УДК 531
Составитель: Быкадор В.С.

Конспект лекций. – Ростов-на-Дону : Донской гос. техн. ун-т, 2022. – 184 с.

Конспект лекций по дисциплине «Теория колебаний» предназначены для студентов очной и заочной формы обучения по направлению подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» профиль «Автоматизация технологических процессов и производств в машиностроении».

УДК 531

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Донского государственного технического университета

В печать ___.___.20__г.
Формат 60x84/16. Объем ____ усл. п. л.
Тираж___ экз. Заказ № ___.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О КИНЕМАТИКЕ.

Линейные скорость и ускорение

Теория колебаний

канд. техн. наук Быкадор В.С.

Донской государственный технический университет
Кафедра: "Автоматизация производственных процессов"

Ростов-на-Дону, 2020 г.

Что такое кинематика

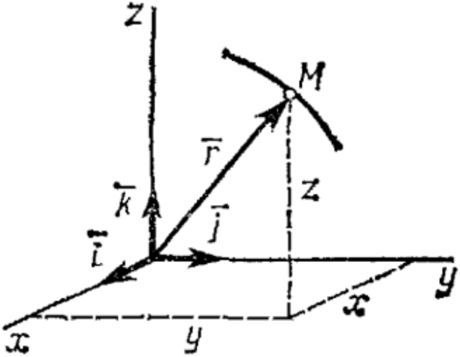
Это раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инерционности и действующих на них сил. Для определения положения движущегося тела в разные моменты времени, необходимо выбрать какую-нибудь систему отсчета, которая будет связана с каким-нибудь неподвижным телом, по отношению к которому изучается движение.

Способы задания движения точки

1. векторный;
2. координатный;
3. естественный.

Векторный способ задания движения точки[Трг.96]

Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Тогда, положение точки M можно определить в любой момент времени, задав ее радиус-вектор $\bar{r}$, проведенным из начала координат O в точку M.



Задание положения точки через вектор-функцию $\bar{r} = r(\bar{t})$, является наиболее общим способом описания положения точки в выбранной системе координат.

Координатный способ задания движения точки[Трг.97]

Известно, что вектор задается своими проекциями на оси координат. Пусть проекции вектора $\bar{r}$ на оси координат обозначим как

1. $r_x = x$;
2. $r_y = y$;
3. $r_z = z$.

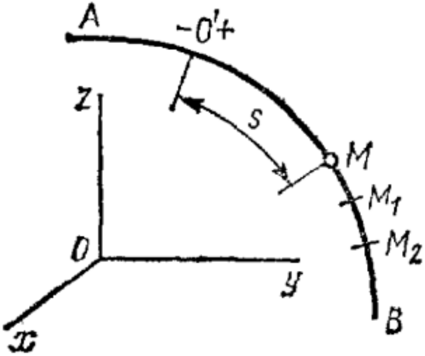
Для того чтобы задать закон движения точки, т.е. её положение в пространстве в любой момент времени t, необходимо знать значения координат точки для каждого момента времени:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \tag{1}$$

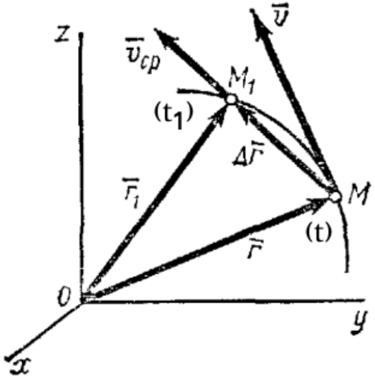
Естественный способ задания движения точки[Трг.98]

Такой способ задания движения удобен тогда, когда траектория движущейся точки заранее известна. Чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо задать:

1. траекторию точки;
2. начало отчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений;
3. закон движения точки вдоль траектории в виде $s = f(t)$.



Вектор скорости точки[Трг.99]



1. точка в положении M определяется вектором $\bar{r}$, а в положении M_1 – вектором $\bar{r}_1$;
2. перемещение точки из M в M_1 за время $\Delta t = t_1 - t$ формирует вектор $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$;
3. скорость $\bar{\nu}_{\text{ср.}} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$;
4. в пределе $\bar{\nu} = \lim_{\Delta t \to 0}(\bar{\nu}_{\text{ср.}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Скорость при различных способах задания движения

Нкт.107-121

Векторный способ:

$$\bar{\nu} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$$

Координатный способ (декартовые координаты):

$$\nu_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ \nu_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ \nu_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

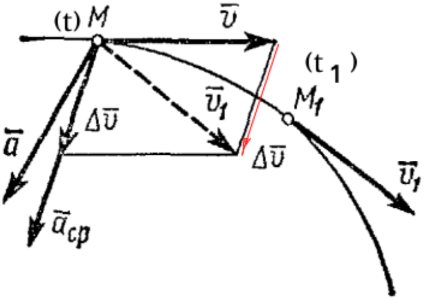
Естественный способ:

$$\bar{\nu} = \frac{ds}{dt}\,\bar{\tau}$$

$$\nu_\tau = \frac{ds}{dt}$$

ν_τ – алгебраическая скорость точки. Это проекция скорости точки $\bar{\nu}$ на положительное направление касательной τ к траектории её движения.

Вектор ускорения точки[Трг.100]



1. в момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость $\bar{\nu}$, а в момент времени t_1 перемещается в положение M_1 и имеет скорость $\bar{\nu}_1$;
2. перемещение точки из M в M_1, за время $\Delta t = t_1 - t$, формирует приращение скорости $\Delta\bar{\nu} = \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}$;
3. отложим вектор $\Delta\bar{\nu}$ от точки M;
4. получим среднее ускорение $\bar{a}_{\text{ср.}} = \frac{\Delta\bar{\nu}}{\Delta t}$;
5. $\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0}(\bar{a}_{\text{ср.}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\nu}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\nu}}{dt}$.

Ускорение при различных способах задания движения

Нкт.107-121

Векторный способ:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\nu}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}$$

Координатный способ (декартовые координаты):

$$a_x = \frac{d\nu_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; a_y = \frac{d\nu_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; a_z = \frac{d\nu_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z};$$

Естественный способ:

$$a_\tau = \frac{(d\bar{\nu})_\tau}{dt} = \frac{d\nu}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$a_n = \frac{\nu^2}{\rho}$$

ρ – радиус кривизны кривой (траектории движения).

СПРАВКА

$\rho = \frac{1}{k}$ – радиус кривизны кривой.
k – кривизна.

Для кривой $y = f(x)$ кривизна k в точке $M(x, y)$ определяется по выражению:

$$k = \frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Для кривой заданной в параметрической форме уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, кривизна k в произвольной точке $M(x, y)$ определяется по выражению:

$$k = \frac{x'y''-y'x''}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Вычисление скорости[Трг.102]

Зная проекции скорости на координатные оси, найдём её модуль и направление (т.е. углы α, β и γ которые вектор $\bar{\nu}$ образует с координатными осями):

$$\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\nu_x}{\nu}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\nu_y}{\nu}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\nu_z}{\nu}$$

Вычисление ускорения[Трг.103]

Зная проекции ускорения на координатные оси, найдём его модуль и направление (т.е. углы α_1, β_1 и γ_1 которые вектор $\bar{a}$ образует с координатными осями):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos(\alpha_1) = \frac{a_x}{a}$$

$$\cos(\beta_1) = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos(\gamma_1) = \frac{a_z}{a}$$

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О КИНЕМАТИКЕ.

Угловая скорость и ускорение

Теория колебаний

канд. техн. наук Быкадор В.С.

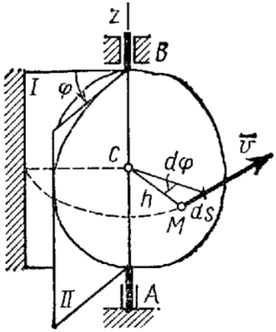
Донской государственный технический университет
Кафедра: "Автоматизация производственных процессов"

Ростов-на-Дону, 2020 г.

Вращательное движение твёрдого тела[Тrг.119]

Определение

Вращательным движением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во всё время движения неподвижными.



Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется осью вращения.

Кинематические характеристики вращательного движения тела

Закон вращательного движения определяется углом поворота тела вокруг своей оси с течением времени t:

$$\varphi = f(t)$$

1. за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, тогда средняя угловая скорость $\omega_{\text{ср.}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В переделе $\Delta t \to 0$, получим

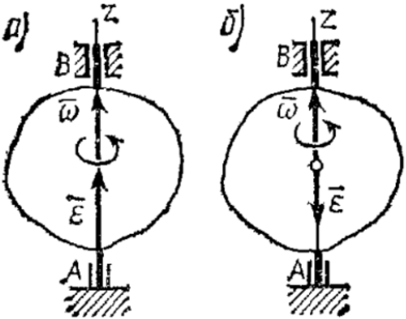
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}$$

2. если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, тогда среднее угловое ускорение $\varepsilon_{\text{ср.}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. В переделе $\Delta t \to 0$, получим

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Направление вращательного движения

1. $\omega > 0$ - вращение против хода часовой стрелки;
2. $\omega < 0$ - вращение по ходу часовой стрелки;
3. если направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\bar{\omega}$, то движение является ускоренным (рис. а);
4. если направление $\bar{\varepsilon}$ противоположно направлению $\bar{\omega}$, то движение является замедленным (рис. б).



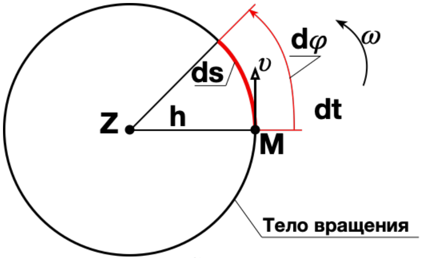
Связь кинематических параметров линейного и вращательного движений[Трг.122]

Точка M, находящаяся на расстоянии h от оси вращения Z тела, за элементарное время dt совершит перемещение ds. Тогда линейная скорость ν определяется выражением

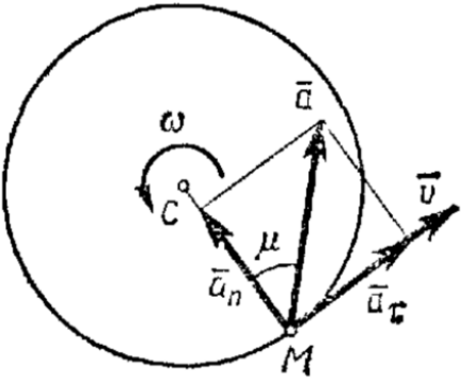
$$\nu = \frac{ds}{dt}$$

С другой стороны $ds = h\,d\varphi$, тогда

$$\nu = h\,\frac{d\varphi}{dt} = h\,\omega$$



Связь кинематических параметров линейного и вращательного движений



Связь кинематических параметров линейного и вращательного движений

Т.к. $a_\tau = \frac{d\nu}{dt}$ и $a_n = \frac{\nu^2}{\rho}$, то

Тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = h\,\frac{d\omega}{dt} = h\,\varepsilon$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{h^2\,\omega^2}{\rho},\ \rho = h \Rightarrow a_n = h\,\omega^2$$

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

или

$$a = h\,\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Угол μ между нормальным ускорением a_n и полным ускорением a

$$tg(\mu) = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Векторы скорости и ускорения точек тела$^{\text{Трг.124}}$

Проведём из точки O в точку M радиус-вектор $\bar{r}$, тогда

- скорость:

$$|\nu| = |\omega|\, h = |\omega|\, r\, \sin(\alpha)$$

или

$$|\nu| = |\bar{\omega} \times \bar{r}|$$

Следовательно

$$\bar{\nu} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

- ускорение

$$a = \frac{d\bar{\nu}}{dt} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}\right) \Rightarrow a = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{\nu})$$

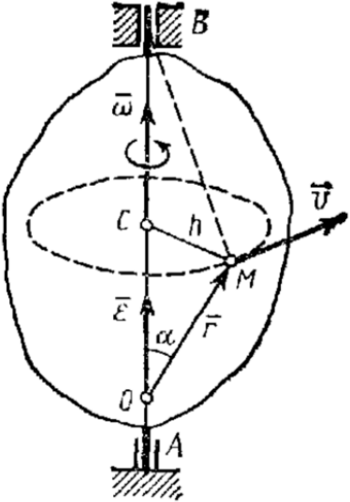
где $a_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$, $a_n = \bar{\omega} \times \bar{\nu}$

Известно, что

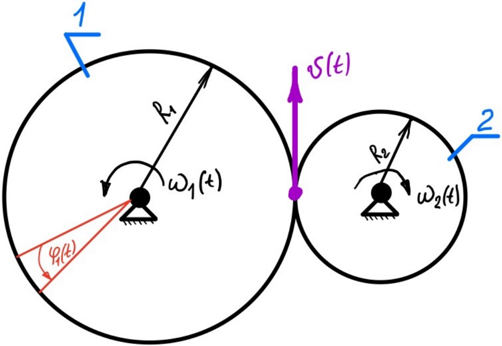
$$|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon\, r\, \sin(\alpha) = \varepsilon\, h$$

$$|\bar{\omega} \times \bar{\nu}| = \omega\, \nu\, \sin(90^0) = \omega^2\, h$$

Векторы скорости и ускорения точек тела



Пример № 01. Условие



Имеется зацепление двух роликов. В точке контакта роликов скольжение отсутствует. Известны следующие параметры механической системы:

1. закон изменения угла поворота ролика 1 – $\varphi(t) = 2\,t^2$;
2. радиусы роликов – $R_1 = 1$ м, $R_2 = 0{,}25$ м;

Требуется найти аналитические зависимости для следующих кинематических параметров механической системы: $\omega_1(t)$, $\varepsilon_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\varepsilon_2(t)$.

Пример № 01. Решение

$$\omega_1(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = (2\,t^2)_t{}' = 4\,t \text{ рад/с}$$

$$\varepsilon_1(t) = \frac{d\omega_1(t)}{dt} = (4\,t)_t{}' = 4 \text{ рад/с}^2$$

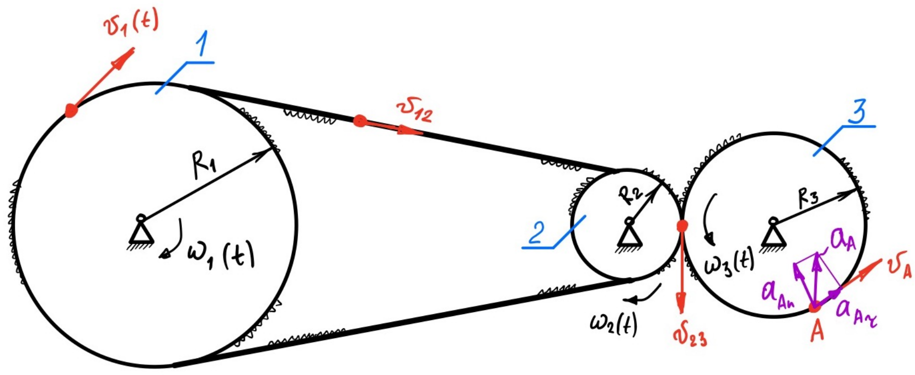
Т.к. $\nu(t) = R_1\,\omega_1(t)$ и $\nu(t) = R_2\,\omega_2(t)$, то $\nu(t) = \nu(t) \Rightarrow R_1\,\omega_1(t) = R_2\,\omega_2(t)$, т.е.

$$\omega_2(t) = \frac{R_1}{R_2}\,\omega_1(t) = \frac{4\,R_1}{R_2}\,t \text{ рад/с}$$

Знaя аналитическое выражение для угловой скорости $\omega_2(t)$ найдём аналитическое выражение для углового ускорения $\varepsilon_2(t)$

$$\varepsilon_2(t) = \frac{d\omega_2(t)}{dt} = \left(\frac{4\,R_1}{R_2}\,t\right)_t{}' = \frac{4\,R_1}{R_2} \text{ рад/с}^2$$

Пример № 02. Условие



Рассмотрим механическую передачу состоящую из трёх вращающихся колёс и ремня. При контакте ремня с колёсами 1 и 2, а также при контакте колёс 2 и 3 проскальзывание отсутствует.

Пусть известны следующие параметры системы:

1. закон изменения скорости колеса 1 – $\nu_1(t) = 4\,t^2 + 4\,t$;
2. радиусы колёс – $R_1 = 1$ м, $R_2 = 0{,}25$ м, $R_3 = 0{,}5$ м.

Пример № 02. Условие

Требуется найти аналитические зависимости для следующих кинематических параметров механической системы:

$$\nu_A(t),\ \varepsilon_3(t),\ \omega_3(t),\ a_A(t).$$

Также для значения времени $\mathbf{t = 1{,}5}$ с найти численные значения этих кинематических параметров системы.

Пример № 02. Решение

$$\nu_A(t) = \nu_{23}(t) = \nu_{12}(t) = \nu_1(t) = 4\,t^2 + 4\,t \text{ м/с}$$

Но также известно, что

$$\nu_A(t) = R_3\,\omega_3(t) \Rightarrow \omega_3(t) = \frac{\nu_A(t)}{R_3} = \frac{4\,t^2 + 4\,t}{R_3} \text{ рад/с}$$

Тогда угловое ускорение колеса 3 будет определяться следующим выражением

$$\varepsilon_3(t) = \frac{d\omega_3(t)}{dt} = \frac{1}{R_3}(4\,t^2 + 4\,t)_t{}' = \frac{8\,t + 4}{R_3} \text{ рад/с}^2$$

Найдём ускорение точки A, расположенной на ободе 3-го колеса

$$a_A(t) = R_3\sqrt{\varepsilon_3^2(t) + \omega_3^4(t)} \Rightarrow a_A(t) = R_3\sqrt{\left(\frac{8\,t + 4}{R_3}\right)^2 + \left(\frac{4\,t^2 + 4\,t}{R_3}\right)^4} \text{ м/с}^2$$

Пример № 02. Решение

Найдём численные значения требуемых кинематических параметров механической системы для времени $t = 1{,}5$ с.

Параметр	Значение
$\nu_A(t)$, м/с	15
$\mathrm{a}_A(t)$, м/с^2	450,28
$\omega_3(t)$, рад/с	30
$\varepsilon_3(t)$, рад/с^2	32

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О КИНЕМАТИКЕ.

Скорость сложного движения точки

Теория колебаний

канд. техн. наук Быкадор В.С.

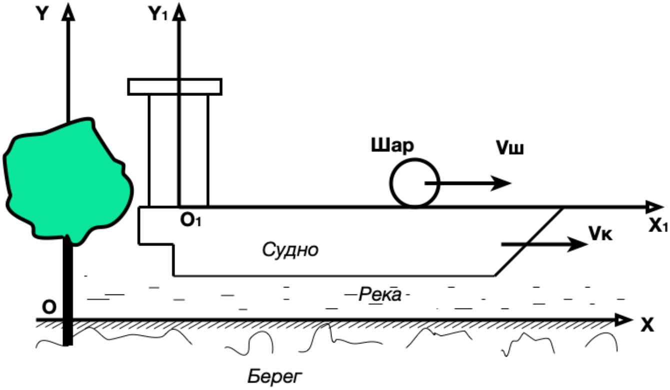
Донской государственный технический университет
Кафедра: "Автоматизация производственных процессов"

Ростов-на-Дону, 2020 г.

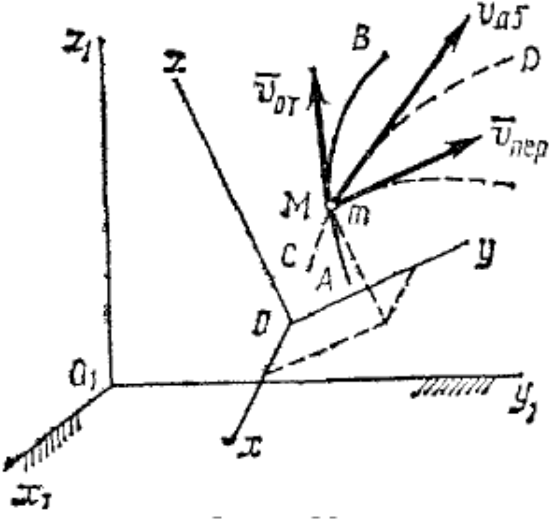
Сложное движение точки[Трг.155]

Определение

Движение, совершаемое точкой (или телом) одновременно по отношению к двум системам отчёта, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определённым образом движется к первой, называется составным или сложным.



Относительное, переносное и абсолютное движения[Трг.155]



Относительное, переносное и абсолютное движения[Трг.155]

Рассмотрим точку M, движущуюся по отношению к подвижной системе отчета $Oxyz$, которая в свою очередь каким-то образом движется относительно другой системы отсчёта $O_1x_1y_1z_1$, которую можно назвать основной или условно неподвижной.

Тогда можно ввести следующие определения движений:

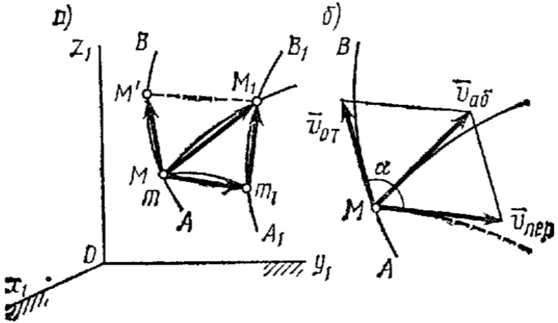
1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отчёта (к осям $Oxyz$), называется относительным.
2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчёта $Oxyz$ (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M переносным. Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки m, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M, называется переносной скоростью точки M.
3. Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отчёта $O_1x_1y_1z_1$, называется абсолютным или сложным.

Относительное, переносное и абсолютное движения[Трг.155]

Таким образом:

- движение шара относительно палубы судна будет относительным;
- движение судна по отношению к берегу будет для шара переносным движением, то есть скорость той точки палубы, которой в данный момент касается шар, будет в этот момент его переносной скоростью (можно мысленно остановить движение шара по палубе судна);
- движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением.

Теорема о сложении скоростей[Трг.156]



Рассмотрим сложное движение точки M. Пусть эта точка совершает за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ вдоль траектории AB относительное перемещение, определяемое вектором $\overline{MM'}$ (рис. а). Сама кривая AB, двигаясь вместе со своей системой координат, перейдёт за промежуток времени Δt в некоторое новое положение A_1B_1. Точка m кривой AB, с которой в момент времени t совпадает точка M, совершит, за время Δt, перемещение $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. Таким образом, точка M придёт в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$.

Теорема о сложении скоростей[Трг.156]

Из векторного треугольника Mm_1M_1 имеем:

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}$$

Поделим обе части этого равенства на Δt и перейдём к пределу

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}\right)$$

но так как

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{mM}}{\Delta t}\right) = \overline{\nu}_{\text{от}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t}\right) = \overline{\nu}_{\text{пер}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right) = \overline{\nu}_{\text{аб}}$$

Теорема о сложении скоростей[Трг.156]

Отметим, что векторы $\overline{\nu}_{\text{аб}}$, $\overline{\nu}_{\text{от}}$ и $\overline{\nu}_{\text{пер}}$ направлены по касательным к соответствующим траекториям, как показано на рисунке б) (см. слайд 6)

Теорема о сложении скоростей.

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

$$\overline{\nu}_{\text{аб}} = \overline{\nu}_{\text{от}} + \overline{\nu}_{\text{пер}}$$

Модуль абсолютной скорости $\overline{\nu}_{\text{аб}}$ Трг.158

Модуль абсолютной скорости $\overline{\nu}_{\text{аб}}$ можно отыскать исходя из следующих соображений:

$$\overline{\nu}^2_{\text{аб}} = \overline{\nu}_{\text{аб}} \cdot \overline{\nu}_{\text{аб}} = |\overline{\nu}_{\text{аб}}| \cdot |\overline{\nu}_{\text{аб}}| \cdot \cos(0^0) = |\overline{\nu}_{\text{аб}}|^2$$

но

$$\overline{\nu}^2_{\text{аб}} = (\overline{\nu}_{\text{от}} + \overline{\nu}_{\text{пер}})^2 = (\overline{\nu}_{\text{от}} + \overline{\nu}_{\text{пер}}) \cdot (\overline{\nu}_{\text{от}} + \overline{\nu}_{\text{пер}}) = \overline{\nu}^2_{\text{от}} + 2 \cdot \overline{\nu}_{\text{от}} \cdot \overline{\nu}_{\text{пер}} + \overline{\nu}^2_{\text{пер}}$$

так как

$$\overline{\nu}^2_{\text{от}} = |\overline{\nu}_{\text{от}}|^2, \ \overline{\nu}^2_{\text{пер}} = |\overline{\nu}_{\text{пер}}|^2$$

$$2 \cdot \overline{\nu}_{\text{от}} \cdot \overline{\nu}_{\text{пер}} = 2 \cdot |\overline{\nu}_{\text{от}}| \cdot |\overline{\nu}_{\text{пер}}| \cdot \cos(\alpha)$$

Тогда

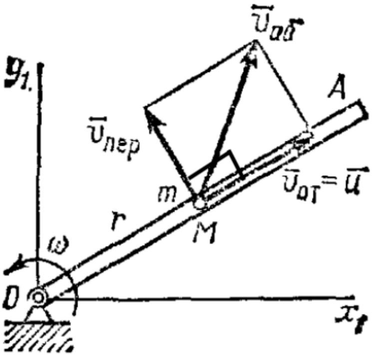
$$\overline{\nu}^2_{\text{аб}} = |\overline{\nu}_{\text{аб}}|^2 = |\overline{\nu}_{\text{от}}|^2 + 2 \cdot |\overline{\nu}_{\text{от}}| \cdot |\overline{\nu}_{\text{пер}}| \cdot \cos(\alpha) + |\overline{\nu}_{\text{пер}}|^2$$

Модуль абсолютной скорости $\overline{\nu}_{\text{аб}}$ [Трг.158]

Окончательно получим модуль абсолютной скорости $\overline{\nu_{\text{аб}}}$

$$|\overline{\nu}_{\text{аб}}| = \sqrt{|\overline{\nu}_{\text{от}}|^2 + 2\,|\overline{\nu}_{\text{от}}|\,|\overline{\nu}_{\text{пер}}|\,\cos(\alpha) + |\overline{\nu}_{\text{пер}}|^2}$$

Задача № 01 на вычисление скоростей при сложном движении[Трг.158]



Точка M движется вдоль трубы OA с некоторой скоростью $\overline{u}$. Сама труба вращается в плоскости Ox_1y_1 с угловой скоростью ω.
Определить абсолютную скорость $\overline{\nu}_{аб}$ точки M относительной неподвижной системы координат Ox_1y_1, при условии что $OM = r$.

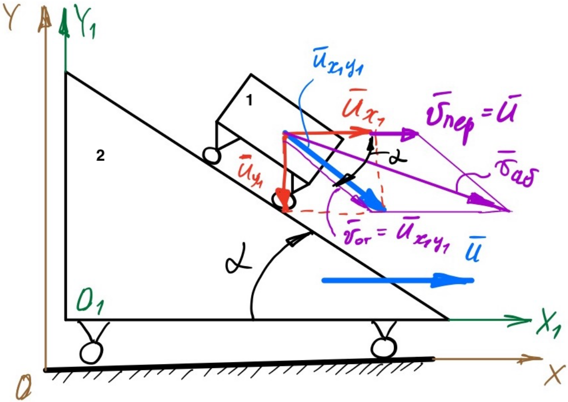
Задача № 01 на вычисление скоростей при сложном движении[Трг.158]

Решение.

1. Расположим наблюдателя внутри движущейся трубы, тогда скорость $\overline{u}$ точки M будет являться относительной скоростью сдвижения точки M.
2. Зафиксируем точку M в некотором положении m в момент времени t, тогда переносное движение точки M будет определяться движением трубы, что позволяет определить переносную скорость $\overline{\nu}_{\text{пер}}$ точки M.
3. Тогда $\overline{\nu}_{\text{аб}} = \overline{\nu}_{\text{от}} + \overline{\nu}_{\text{пер}}$, а модуль абсолютной скорости будет равен
$$|\overline{\nu}_{\text{аб}}| = \sqrt{|\overline{\nu}_{\text{от}}|^2 + 2\,|\overline{\nu}_{\text{от}}|\,|\overline{\nu}_{\text{пер}}|\,\cos(\alpha) + |\overline{\nu}_{\text{пер}}|^2}$$
4. Так как $\nu_{\text{от}} = u$, $\nu_{\text{пер}} = \omega \cdot OM = \omega \cdot r$.
5. Угол α между относительной $\overline{\nu}_{\text{от}}$ и переносной $\overline{\nu}_{\text{пер}}$ скоростями равен 90^0, тогда $\cos(90^0) = 0$.
6. Учитывая всё выше приведённое, получим аналитическое выражение абсолютной скорости для рассматриваемой механической системы
$$\overline{\nu}_{\text{аб}} = \sqrt{u^2 + \omega^2 \cdot r^2}$$

.

Задача № 02 на вычисление скоростей при сложном движении



Тележка 1 движется по наклонной поверхности тележки 2. Тележка 2 является движущейся системой координат $O_1x_1y_1$ для тележки 1. Тележка 2 движется в неподвижной системе координат Oxy.

Задача № 02 на вычисление скоростей при сложном движении

Требуется найти величины относительной скорости $\overline{\nu}_{\text{от}}$, переносной скорости $\overline{\nu}_{\text{пер}}$ и абсолютной скорости $\overline{\nu}_{\text{аб}}$ тележки 1 для времени $t = t_1 = 3$ с.

Дано:

$x(t) = 3\,t^3 + 2\,t$, м;
$x_1(t) = 2\,t^2$, м;
$y_1(t) = t^3 - t$, м;
$\alpha = 30^0$;
$t_1 = 3$, с;

Задача № 02 на вычисление скоростей при сложном движении

Величина абсолютной скорости $\overline{\nu}_{\text{аб}}$ вычисляется по выражению:

$$|\overline{\nu}_{\text{аб}}| = \sqrt{|\overline{\nu}_{\text{от}}|^2 + 2\,|\overline{\nu}_{\text{от}}|\,|\overline{\nu}_{\text{пер}}|\,\cos(\alpha) + |\overline{\nu}_{\text{пер}}|^2}$$

Найдём составляющие входящие в выше приведенное выражение, то есть модули относительной $\overline{\nu}_{\text{от}}$ и переносной скоростей $\overline{\nu}_{\text{пер}}$.

Для нахождения величины относительной скорости $|\overline{\nu}_{\text{от}}|$ перенесём наблюдателя в подвижную систему координат $O_1x_1y_1$.
Как можно видеть, относительная скорость $|\overline{\nu}_{\text{от}}|$ соответствует скорости $\overline{u}_{x1y1}$, то есть скорости движения тележки 1 по наклонной поверхности тележки 2.
В свою очередь скорость $\overline{u}_{x1y1}$ является результирующей скоростей $\overline{u}_{x1}$ и $\overline{u}_{y1}$, направленных по осям x_1 и y_1 подвижной системы координат.
Тогда относительная скорость $\overline{\nu}_{\text{от}}$ тележки 1 будет равна

$$\overline{\nu}_{\text{от}} = \overline{u}_{x1y1} = \overline{u}_{x1} + \overline{u}_{y1}$$

Задача № 02 на вычисление скоростей при сложном движении

1. Вычисление величины относительной скорости $|\overline{\nu}_{\text{от}}|$.

Модуль относительной скорости $|\overline{\nu}_{\text{от}}|$ будет равен

$$|\overline{\nu}_{\text{от}}| = \sqrt{|\overline{u}_{x_1}|^2 + 2\,|\overline{u}_{x_1}|\,|\overline{u}_{y_1}|\,\cos(\gamma) + |\overline{u}_{y_1}|^2}$$

Где
$\overline{u}_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = 4\,t$, м/с
$\overline{u}_{y_1} = \frac{dy_1}{dt} = 3\,t^2 - 1$, м/с
Найдём численные значения скоростей $\overline{u}_{x_1}$, $\overline{u}_{y_1}$ для времени $t = t_1 = 3$ с
$\overline{u}_{x_1} = 4\,t_1 = 4 \cdot 3 = 12$, м/с
$\overline{u}_{y_1} = 3\,t_1^2 - 1 = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$, м/с
Отметим, так как значения векторов $\overline{u}_{x_1}$, $\overline{u}_{y_1}$ больше нуля, то их направления на рисунке выбраны верно.

Вычислим значение модуля вектора относительной скорости

$$|\overline{\nu}_{\text{от}}| = \sqrt{|12|^2 + 2 \cdot |12| \cdot |26| \cdot \cos(90^0) + |26|^2} = 28,6 \text{ м/с}$$

Отметим, что угол γ между векторами $\overline{u}_{x_1}$ и $\overline{u}_{y_1}$ равен 90^0.

Задача № 02 на вычисление скоростей при сложном движении

2. Вычисление величины переносной скорости $|\overline{\nu}_{\text{пер}}|$.
Из рисунка видно, что

$$\overline{\nu}_{\text{пер}} = \overline{u}$$

В свою очередь скорость тележки 2 найдём из закона её движения

$$\overline{u} = \frac{dx}{dt} = 9\,t^2 + 2,\ \text{м/с}$$

Теперь вычислим скорость $\overline{\nu}_{\text{пер}}$ для времени $t = t_1 = 3$ с

$$\overline{\nu}_{\text{пер}} = \overline{u} = 9 \cdot 3^2 + 2 = 83,\ \text{м/с}$$

Задача № 02 на вычисление скоростей при сложном движении

3. Вычисление величины абсолютной скорости $|\overline{\nu}_{\text{аб}}|$ тележки 1

Подставим значения $\overline{\nu}_{\text{от}}$ и $\overline{\nu}_{\text{пер}}$ в выражение модуля абсолютной скорости $|\overline{\nu}_{\text{аб}}|$

$$|\overline{\nu}_{\text{аб}}| = \sqrt{|28,6|^2 + 2 \cdot |28,6| \cdot |83| \cdot \cos(30^0) + |83|^2} \approx 108,75 \text{ м/с}$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ
Часть I
Теория колебаний

канд. техн. наук Быкадор В.С.

Донской государственный технический университет
Кафедра: "Автоматизация производственных процессов"

Ростов-на-Дону, 2020 г.

Общие сведения о кинетической энергии$^{\text{Трг.301}}$

Кинетическая энергия является характеристикой как поступательного, так и вращательного движения. Кинетическая энергия является величиной скалярной и существенно положительной.

Отметим так же то что, на изменение кинетической энергии кроме внешних сил влияют и внутренние силы.

Кинетическая энергия обозначается: T
Единица измерения кинетической энергии: $\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$

Определение кинетической энергии[Трг.301]

Определение

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_k \cdot \nu_k^2}{2}$$

Кинетическая энергия поступательного движения[Трг.302]

При поступательном движении все точки движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс ν_C.

$$T_{\text{пост}} = \sum \frac{m_k \cdot \nu_C^2}{2} = \left(\sum m_k\right) \cdot \frac{\nu_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{пост}} = M\,\frac{\nu_C^2}{2}$$

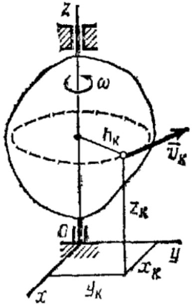
где M – масса всей системы, кг.

Справка. Декартовы координаты центра масс[Нктн.272]

$x_C = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k\, x_k}{M}$;
$y_C = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k\, y_k}{M}$;
$z_C = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k\, z_k}{M}$;
где m_k – масса k-ой точки, кг; x_k, y_k, z_k – декартовые координаты k-ой точки, ед. длины; $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ – масса всей системы, кг.

Кинетическая энергия вращательного движения[Трг.302]

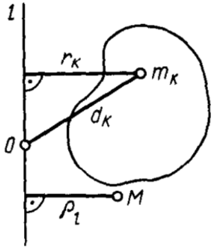
При вращении тела вокруг оси OZ (см. рис.), скорость любой его точки будет равна $\nu_k = \omega\, h_k$, где h_k – расстояние от оси OZ до k-ой точки, ω – угловая скорость тела.



$$T_{\text{вр}} = \sum \frac{m_k \cdot \nu_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \cdot \omega^2\, h_k^2}{2} = \left(\sum m_k\, h_k^2\right)\, \frac{\omega^2}{2} = J_Z\, \frac{\omega^2}{2}$$

где J_Z – осевой момент инерции.

Справка. Осевой момент инерции[Нктн.274]



Момент инерции J_l системы материальных точек относительно оси Ol называется сумма произведений масс этих точек на квадрат их расстояния r_k до оси Ol, то есть

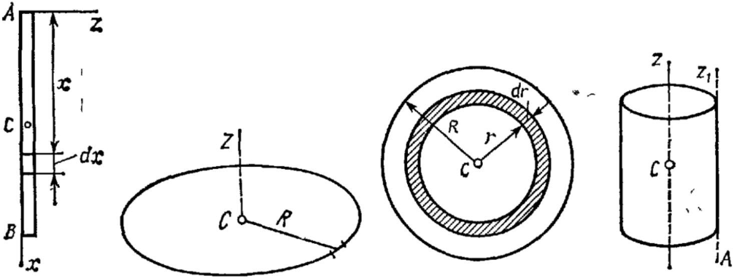
$$J_l = \sum_{k=1}^{N} m_k\, r_k^2$$

или

$$J_l = M\, \rho_l^2$$

где $\rho_l^2 = \sqrt{J_l/M}$ – радиус инерции.

Справка. Моменты инерции простых однородных тел[Трг.266]



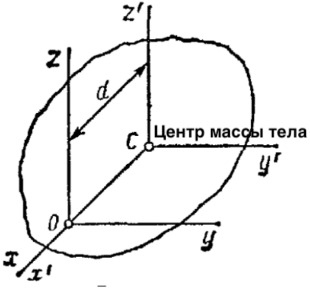
1. тонкий однородный стержень – $J_A = Ml^2/3$;
2. тонкое однородное кольцо – $J_C = MR^2$;
3. круглая однородная пластина или цилиндр – $J_C = MR^2/2$.

Единица измерения момента инерции $[J] = [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$.

Справка. Моменты инерции простых однородных тел[Трг.268]

1. сплошная прямоугольная пластина массой M со сторонами a и b (ось x направлена по стороне a, ось y направлена по стороне b) – $J_x = Mb^2/3$; $J_y = Ma^2/3$;
2. прямой сплошной круглый конус массой M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса) – $J_z = 0{,}3MR^2$;
3. сплошной шар массой M и радиусом R (ось z направлена вдоль диаметра) – $J_z = 0{,}4MR^2$.

Справка. Теорема Гюйгенса[Трг.268]



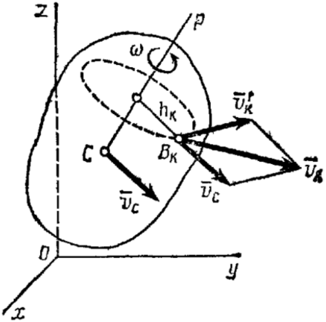
Теорема Гюйгенса.

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенной с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + M \cdot d^2$$

Кинетическая энергия для общего случая движения

Трг.303



1. Тело, с центром масс C, совершает поступательное движение со скоростью $\overline{\nu}_C$.
2. Тело вращается вокруг оси CP с угловой скоростью ω.
3. Сложное движение некоторой точки тела B_k будет складываться из относительного со скоростью $\overline{\nu}'_k$ и переносного со скоростью $\overline{\nu}_C$.
4. Заметим, что $\overline{\nu}'_k = \omega\, h_k$, где h_k – расстояние от точки B_k до оси CP.

Кинетическая энергия для общего случая движения

Трг.303

Известно, что

$$T = \sum \frac{m_k \cdot \nu_k^2}{2}$$

Но $\overline{\nu}_k = \overline{\nu}_C + \overline{\nu}'_k$, тогда

$$\overline{\nu}_k^2 = \nu_k^2 = (\overline{\nu}_C + \overline{\nu}'_k)^2 = \nu_C^2 + \nu_k'^2 + 2\,\overline{\nu}_C\,\overline{\nu}'_k = \nu_C^2 + \omega^2\,h_k^2 + 2\,\overline{\nu}_C\,\overline{\nu}'_k$$

Заметим, что $\overline{\nu}_i^2 = |\overline{\nu}_i| \cdot |\overline{\nu}_i| \cdot \cos(0^0) = |\overline{\nu}_i|^2 = \nu_i^2$

Тогда получим

$$T = \left(\sum m_k\right) \frac{\nu_C^2}{2} + \left(\sum m_k\,h_k^2\right) \frac{\omega^2}{2} + \overline{\nu}_C \sum m_k\,\overline{\nu}'_k$$

или

$$T = M\,\frac{\nu_C^2}{2} + J_{CP}\,\frac{\omega^2}{2} + \overline{\nu}_C \sum m_k\,\overline{\nu}'_k$$

Справка. Количество движения системы[Трг.280]

Определение

Количеством движения системы называется векторная величина $\overline{Q}$, равная геометрической сумме количеств движений всех точек системы

$$\overline{Q} = \sum m_k \, \overline{\nu}_k$$

где $m_k \, \overline{\nu}_k$ – количество движения k-ой точки, $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Замечание. Если при движении системы центр масс остаётся неподвижным, то количество движения тела равно нулю.

Например, количество движения тела, которое вращается относительно неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Кинетическая энергия для общего случая движения

Трг.303

Выводы:

1. Если в качестве полюса принять не центр масс C, а какую-нибудь точку A тела и мгновенная ось AP не будет всё время проходить через центр масс, то кинетическая энергия для общего случая движения тела будет определяться выражением

$$T = M\,\frac{\nu_C^2}{2} + J_{CP}\,\frac{\omega^2}{2} + \overline{\nu}_C \sum m_k\,\overline{\nu}'_k$$

2. Если же в качестве полюса выбран центр масс C тела и мгновенная ось всё время проходит через его центр масс (ось CP на рисунке выше), то будем иметь так называемое плоскопараллельное движение тела. Для этого вида движения $\sum m_k\,\overline{\nu}'_k = 0$, тогда кинетическая энергия будет определятся выражением

$$T = M\,\frac{\nu_C^2}{2} + J_{CP}\,\frac{\omega^2}{2}$$

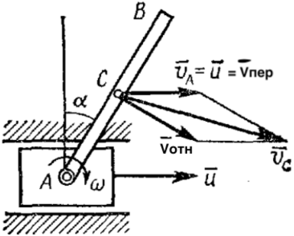
Например, катящееся недеформируемое колесо идеальной круглой формы по поверхности дороги.

Кинетическая энергия сложной механической системы

Если механическая система состоит из нескольких тел, которые имеют различные векторы скоростей, массы (осевые моменты инерций) и может быть различные виды движений, то кинетическая энергия такой сложной механической системы $T_{\text{сист}}$ определяется как сумма кинетических энергий T_i каждого из тел составляющих систему.

$$T_{\text{сист}} = \sum_{i}^{N} T_i$$

Задача[Трг.304]



Механизм состоит из двух тел – ползуна A и стержня B. Стержень B соединён с ползуном A шарниром и поэтому может совершать вращение с угловой скоростью ω. Ползун A движется прямолинейно со скоростью $\overline{u}$.

Об элементах рассматриваемой механической системы известны следующие данные:

1. масса ползуна A – M_A;
2. масса стержня B – M_B;
3. длина стержня B – l.

Требуется найти аналитическую зависимость кинетической энергии T для рассматриваемой механической системы при заданном угле α.

Задача[Трг.304]

Решение.

Так как механическая система состоит из двух элементов (тел), то кинетическая энергия системы будет равна сумме кинетических энергий каждого из элементов механической системы

$$T = T_A + T_B$$

где T – кинетическая энергия механической системы; T_A – кинетическая энергия ползуна; T_B – кинетическая энергия стержня.

Так как ползун совершает поступательное движение, то его кинетическая энергия будет определятся

$$T_A = M_A \frac{\overline{u}^2}{2}$$

Стержень совершает сложное движение, но если в качестве полюса выбрать центр масс стержня C, то для вычисления кинетической энергии стрежня можно использовать формулу для кинетической энергии плоскопараллельного движения

$$T_B = M_B \frac{\overline{\nu}_C^2}{2} + J_C \frac{\omega^2}{2}$$

Задача[Трг.304]

Скорость $\overline{\nu}_C$ является абсолютной скоростью движения стержня B и по сути определяет абсолютную скорость движения его центра масс C.

Тогда

$$\overline{\nu}_C = \overline{\nu}_{\text{отн}} + \overline{\nu}_{\text{пер}}$$

где $\overline{\nu}_{\text{отн}} = \omega\,\frac{l}{2}$; $\overline{\nu}_{\text{пер}} = \overline{u}$.

Найдём $\overline{\nu}_C^2 = |\overline{\nu}_C|^2 = \omega^2\,\frac{l^2}{4} + |\overline{u}|^2 + 2\,\omega\,\frac{l}{2}\,|\overline{u}|\,\cos(\alpha)$ или

$$\overline{\nu}_C^2 = |\overline{u}|^2 + |\overline{u}|\,\omega\,l\,\cos(\alpha) + \omega^2\,\frac{l^2}{4}$$

Задача[Трг.304]

Так как ось вращения стержня B проходить не через его центр масс C, то необходимо вычислить момент инерции J_C относительно центра масс. Воспользуемся теоремой Гюйгенса, тогда получим

$$J_C = J_A - M_B \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

где J_A – момент инерции стержня относительно точки A.

$$J_A = \frac{M_B\, l^2}{3}$$

Тогда

$$J_C = \frac{M_B\, l^2}{3} - \frac{M_B\, l^2}{4} = \frac{M_B\, l^2}{12}$$

Таким образом, кинетическая энергия стержня B будет равна

$$T_B = \frac{M_B}{2}\left(|\overline{u}|^2 + |\overline{u}|\,\omega\, l\,\cos(\alpha) + \omega^2\,\frac{l^2}{4}\right) + \frac{M_B\, l^2\,\omega^2}{24}$$

Задача[Трг.304]

Кинетическая энергия рассматриваемой механической системы будет равна

$$T = M_A\,\frac{\overline{u}^2}{2} + \frac{M_B}{2}\,\left(|\overline{u}|^2 + |\overline{u}|\,\omega\,l\,\cos(\alpha) + \omega^2\,\frac{l^2}{4}\right) + \frac{M_B\,l^2\,\omega^2}{24}$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ
Часть II
Теория колебаний

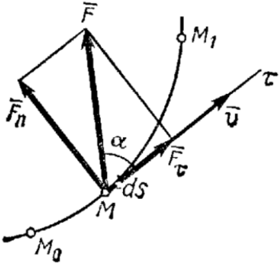
канд. техн. наук Быкадор В.С.

Донской государственный технический университет
Кафедра: "Автоматизация производственных процессов"

Ростов-на-Дону, 2020 г.

Элементарная работа силы[Трг.208]

Работа силы является характеристикой действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении.



Определение

Элементарной работой силы $\overline{F}$, приложенной в точке M называется скалярная величина

$$dA = F_\tau \cdot ds$$

где

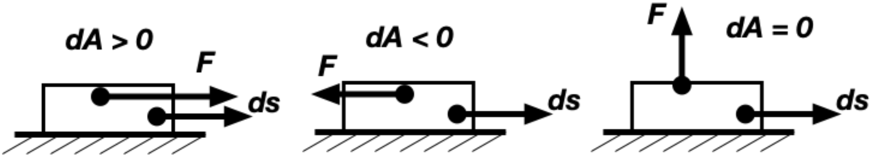
F_τ – проекция силы на касательную $M\tau$ к траектории точки M;

ds – модуль элементарного перемещения точки M.

Элементарная работа силы[Трг.208]

Знак элементарной работы:

1. если сила направлена в сторону движения тела, то элементарная работа положительна ($dA > 0$) (тело ускоряется);
2. если сила направлена в противоположную сторону движению тела, то элементарная работа отрицательна ($dA < 0$) (тело замедляется);
3. если сила направлена перпендикулярно движению тела, то элементарная работа равна нулю ($dA = 0$) на этом направлении ds.



Аналитическое выражение работы[Трг.209]

Если учесть, что $ds = |d\overline{r}|$, где dr – вектор элементарного перемещения точки, то элементарная работа будет выражена

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

Если выразить скалярное произведение векторов $\overline{F}$ и $\overline{r}$ через их проекции и при этом $dr_x = dx$, $dr_y = dy$ и $dr_z = dz$, то получим

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

Работа силы на конечном перемещении[Трг.209]

Работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы

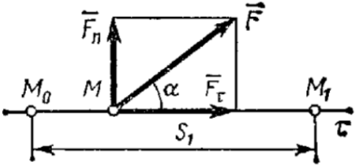
$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA$$

или

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau\, ds$$

или

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz)$$



Единица измерения работы в системе СИ: 1 Дж = 1 Н · м = 1 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}$.

Примеры вычисления работ[Трг.210]

1) На тело действует постоянная по направлению и модулю сила $\overline{F}_\tau = const$ (см. рисунок на предыдущем слайде). Определим работу совершаемую силой $\overline{F}_\tau$ на перемещении M_0M_1, то есть $A_{(M_0M_1)}$.

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau \, ds = F_\tau \int_{(M_0)}^{(M_1)} ds = F_\tau \left(M_1 - M_0\right) = F_\tau \, s$$

где s – перемещение точки (тела).

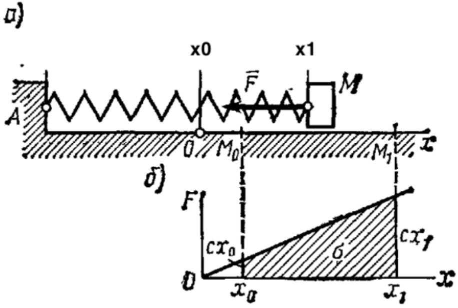
2) Работа силы тяжести. Пусть сила тяжести $\overline{P}$ направлена вдоль оси z, тогда

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{z_0}^{z_1} (-P) \, dz = -P\left(z_1 - z_0\right)\Big|_{z_0 > z_1 \Rightarrow (z_1 - z_0) = -h} = P \cdot h$$

где h – перемещение точки (тела) по вертикальной оси.

Примеры вычисления работ[Трг.210]

3) Работа силы упругости.



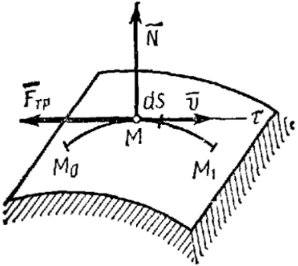
Сила упругости $F_x = -c\,x$, тогда

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (-c\,x)\,dx = -c\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x_0}^{x_1} = -\frac{c}{2}\,(x_1^2 - x_0^2) = \frac{c}{2}\,(x_0^2 - x_1^2)$$

где c – коэффициент жесткости.

Примеры вычисления работ[Трг.210]

4) Работа силы трения.



Сила упругости $F_{\text{тр}} = -f\,N$, тогда

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\text{тр}}\,ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} f\,N\,ds$$

где f – коэффициент трения; N – сила нормального давления (реакция).

Теорема об изменении кинетической энергии точки[Трг.213]

Пусть материальная точка m, перемещается из положения M_0, в которой её скорость была $\overline{\nu}_0$, в положение M_1, в котором точка имела скорость $\overline{\nu}_1$.

Рассмотрим основной закон динамики

$$m\,\overline{a}_\tau = \sum F_{k\tau}$$

Касательное ускорение $\overline{a}_\tau$ представим в виде

$$\overline{a}_\tau = \frac{d\nu}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\cdot\frac{ds}{ds} = \frac{d\nu}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \nu\,\frac{d\nu}{ds}$$

Тогда s

$$m\,\nu\,\frac{d\nu}{ds} = \sum F_{k\tau}$$

Умножим обе части на ds

$$m\,\nu\,d\nu = \sum F_{k\tau}\cdot ds$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки[Трг.214]

По правилу дифференцирования простейших функций получим

$$m\,d\left(\frac{\nu^2}{2}\right) = \sum F_{k\tau}\cdot ds$$

Внесём константу m под знак дифференциала, а так же учтём, что

$$dA_k = F_{k\tau}\cdot ds$$

.

Таким образом получим следующую теорему

Теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме

$$d\left(\frac{m\,\nu^2}{2}\right) = \sum dA_k$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки[Трг.214]

Проинтегрируем обе части предыдущего уравнения в пределах, соответствующим точкам M_0 и M_1. В результате получим теорему об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме.

Теорема об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме

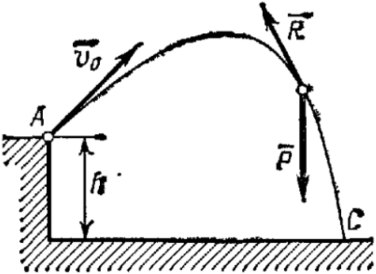
$$\frac{m\nu_1^2}{2} - \frac{m\nu_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$$

или

$$T_1 - T_0 = \sum A_{(M_0M_1)}$$

Изменение кинетической энергии точки при некотором её перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Пример № 01 Трг.215



Груз массой $m = 2$ кг, брошенный со скоростью $\nu_0 = 20$ м/с из точки A, находящегося на высоте $h = 5$ м, имеет в точке падения C скорость $\nu_1 = 16$ м/с.

Определить, чему равна работа действующей на груз при его движении силы сопротивления воздуха $\overline{R}$.

Пример № 01[Трг.215]

Решение.
По условию задачи, на груз во время движения действует сила тяжести $P = m \cdot g$ и сила сопротивления $\overline{R}$. По теореме об изменении кинетической энергии для точки получим

$$\frac{m\nu_1^2}{2} - \frac{m\nu_0^2}{2} = A(P) + A(R)$$

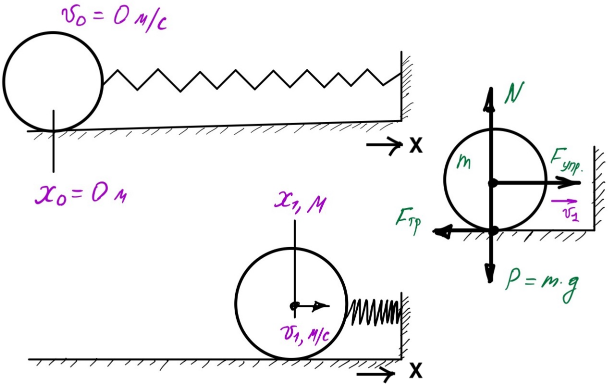
$$\frac{m\nu_1^2}{2} - \frac{m\nu_0^2}{2} = mgh + A(R)$$

$$A(R) = \frac{m\nu_1^2}{2} - \frac{m\nu_0^2}{2} - mgh$$

Выполнив алгебраические преобразования и подставив численные значения, получим

$$A(R) = m\left(\frac{1}{2}\left(\nu_1^2 - \nu_0^2\right) - gh\right) = -243\,\text{Дж}$$

Пример № 02



Шар, к которому прикреплена пружина, удерживается в положении x_0, скорость шара, в положении $x_0 = 0\,\text{м}$, равна $\nu_0 = 0\,\text{м/с}$.
Определить аналитическое выражение для вычисления скорости ν_1, м/с, для некоторого положения x_1, м.
Известны следующие постоянные параметры системы: масса шара m, кг; жёсткость пружины c, кг/м; коэффициент трения f.

Пример № 02

Решение.

По направлению перемещения шара (направление X) работу совершают две силы: сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$ и сила трения $F_{\text{тр}}$.

Сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$ будет формировать положительную работу $A(F_{\text{упр}}) > 0$, так как сила $F_{\text{упр}}$ направлена по ходу движения шара для рассматриваемого момента.

Тогда как сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена противоположно наблюдаемому движению шара, то есть работа от этой силы будет отрицательной $A(F_{\text{упр}}) < 0$.

То есть согласно теореме об изменении кинетической энергии точки, получим

$$\frac{m\,\nu_1^2}{2} - \frac{m\,\nu_0^2}{2} = \sum A_{(x_0 x_1)}$$

$$\frac{m\,\nu_1^2}{2} - \frac{m\,\nu_0^2}{2} = A(F_{\text{упр}}) + A(F_{\text{тр}})$$

Пример № 02

Раскроем выражения работ, совершаемых силами $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{тр}}$ при рассматриваемом движении шара.

$$A(F_{\text{упр}}) = \int_{x_0}^{x_1} F_{\text{упр}}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} c \cdot x\, dx = \frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_0^2\right)$$

$$A(F_{\text{тр}}) = \int_{x_0}^{x_1} -F_{\text{тр}}\, dx = -f \cdot |N| \int_{x_0}^{x_1} dx = -f \cdot |N|\,(x_1 - x_0)$$

Так как $|N| = |P| = m\,g$, где g – ускорение свободного падения, то

$$A(F_{\text{тр}}) = -f\,m\,g\,(x_1 - x_0)$$

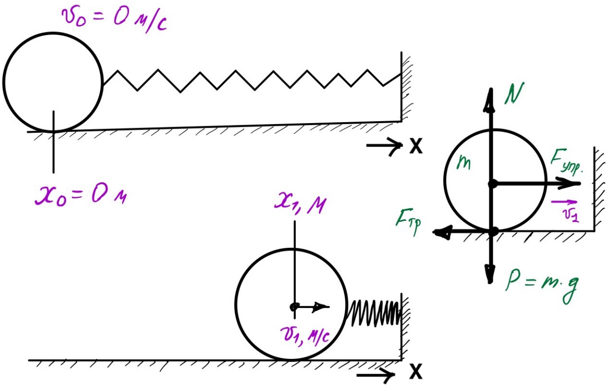
Учитывая то, что $\nu_0 = 0\,\text{м/с}$, получим

$$\frac{m\,\nu_1^2}{2} = \frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_0^2\right) - f\,m\,g\,(x_1 - x_0)$$

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c}{m}\,(x_1^2 - x_0^2) - 2\,f\,g\,(x_1 - x_0)}$$

Если учесть, что согласно условию задачи $x_0 = 0$, то получим

Пример № 02



$$\nu_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{m}x_1 - 2g\cdot f\right)x_1}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме[Трг.307]

Если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_k, имеющей скорость ν_k, то для этой точки получим

$$d\left(\frac{m_k \nu_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_i^e$$

где dA_k^e, dA_i^e – элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил, соответственно.

Составляя такие уравнения для каждой точки системы и суммируя эти уравнения почленно, получим

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

$$d\left(\sum \frac{m_k \nu_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_i^e$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_i^e$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме[Трг.307]

Проинтегрировав обе части приведенного выше дифференциального уравнение по перемещению системы из некоторой начальной точки, где кинетическая энергия системы равна T_0 в положение где кинетическая энергия равна значению T_1, получим

Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_i^e$$

Изменение кинетической энергии системы при некотором её перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных системе внешних и внутренних сил.

Важные допущения[Трг.308]

Рассмотрим два важных допущения, позволяющих упростить выражения теоремы об изменении кинетической системы.

1. Недеформируемая система, то есть механическая система с абсолютно жёсткими элементами.
2. Механическая система с идеальными связями.
   Если для связей, не изменяющихся во времени, сумма работ всех реакций связей при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называются идеальными.

Признаки идеальных связей:

1. поверхности, трением о которые можно пренебречь;
2. абсолютно жёсткие элементы связей.

Если считать, что на механическую систему действуют идеальные связи, то выражения об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной и интегральной формах будут иметь следующий вид:

Изменение кинетической энергии системы в дифференциальной форме с учётом идеальных связей

$$dT = \sum dA_k^a$$

Изменение кинетической энергии системы в интегральной форме с учётом идеальных связей

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^a$$

где $\sum A_k^a$ – сумма активных работ действующих на точки системы внешних и внутренних сил.

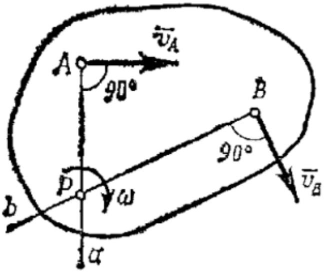
Справка. Мгновенный центр скоростей[Трг.132]

Определение.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если тело движется не поступательно, то такая точка существует в каждый момент времени t, притом такая точка будет единственной.

Справка. Мгновенный центр скоростей[Трг.132]



Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\overline{\nu}_A$ и $\overline{\nu}_B$, соответственно. При этом скорости этих точек не параллельны друг другу (см. рисунок). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\overline{\nu}_A$ и Bb к вектору $\overline{\nu}_B$ и будет мгновенным центром скоростей.

Справка. Мгновенный центр скоростей[Трг.132]

Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.

Тогда

$$\nu_A = \omega \cdot PA, \quad (\overline{\nu}_A \perp PA)$$

а также

$$\nu_B = \omega \cdot PB, \quad (\overline{\nu}_B \perp PB)$$

или же

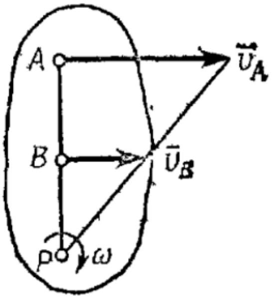
$$\frac{\nu_A}{PA} = \frac{\nu_B}{PB}$$

то есть скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Для определения мгновенного центра скоростей P необходимо знать только направления скоростей $\overline{\nu}_A$ и $\overline{\nu}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры.

Справка. Мгновенный центр скоростей. Важный частный случай[Трг.134]

Если скорости точек A и B ($\overline{\nu}_A$ и $\overline{\nu}_B$) плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\overline{\nu}_A$ (и $\overline{\nu}_B$), то мгновенный центр скоростей P определяется построением показанном на рисунке ниже.

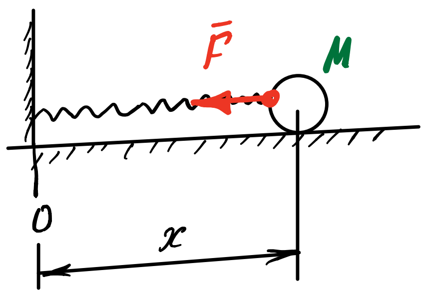


ДГТУ

Трг. 232

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ УЧЕТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ.



Рассмотрим точку M, которая движется прямолинейно

Сила упругости будет равна:

$$F_x = -c \cdot x$$

Дифференциальное ур-ие движения:

$$\boxed{m \cdot \bar a \cdot \bar F}$$

Т.к. $\bar a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot x$

Величина $\bar F$ представляет собой сумму всех сил действующих на точку M в направлении оси X, то получим:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x$$

Выполним преобразования

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x \quad \Big| \cdot \frac{1}{m}$$

$$\frac{m}{m} \ddot{x} = -\frac{c}{m} \cdot x$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m} \cdot x$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0}$$

Дифф. ур-ие свободных колебаний точки при отсутствии сопротивления.

Обозначим: $k^2 = \frac{c}{m}$

Тогда:

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$$

Будем искать решение в виде:

$$x = e^{n \cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = (x)'_t = \left(e^{n \cdot t}\right)'_t = \underline{n e^{n t}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(n e^{n t}\right) = n \frac{d}{dt}\left(e^{n \cdot t}\right) =$$

$$= n \cdot \left(e^{n \cdot t}\right)'_t = n \cdot n \cdot e^{n \cdot t} = \underline{n^2 \cdot e^{n t}}$$

Т.е. $\boxed{\ddot{x} = n^2 e^{n t}}$ $\Big|$ при $x = e^{n \cdot t}$

Тогда в общем случае получим:

$$\boxed{x^{(m)} = \frac{d^m x}{dt^m} \Rightarrow n^m \cdot e^{n \cdot t}}$$

Т.к. $x = e^{n \cdot t}$, $\ddot{x} = n^2 \cdot e^{n \cdot t}$, то

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$$

$$\underline{n^2 \cdot e^{n \cdot t} + k^2 \cdot e^{n \cdot t} = 0} \Big| \cdot \frac{1}{e^{n \cdot t}}$$

$$n^2 \cdot \frac{\cancel{e^{n \cdot t}}}{\cancel{e^{n \cdot t}}} + k^2 \frac{\cancel{e^{n \cdot t}}}{\cancel{e^{n \cdot t}}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{n^2 + k^2 = 0}$$

или

$$\underline{n^2 + 0 \cdot n + k^2 = 0}$$

Характеристическое уравнение, полученное по исходному ДУ

Найдём корни данного хар-ого ур-ие:

$$n_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot n^2 \cdot k^2}}{2 \cdot n} = \frac{\pm \sqrt{-4 \cdot n^2 \cdot k^2}}{2 \cdot n} =$$

$$= \frac{\pm \sqrt{(-1) \cdot 4 \cdot n^2 \cdot k^2}}{2 \cdot n} = \frac{\pm \cancel{2n} \cdot \sqrt{-1} \cdot k}{\cancel{2 \cdot n}} = \underline{\pm jk}$$

пара чисто мнимых корней

Решением для ДУ $\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$

будет являться

$$x(t) = C_1 \cdot \sin(kt) + C_2 \cdot \cos(k \cdot t)$$

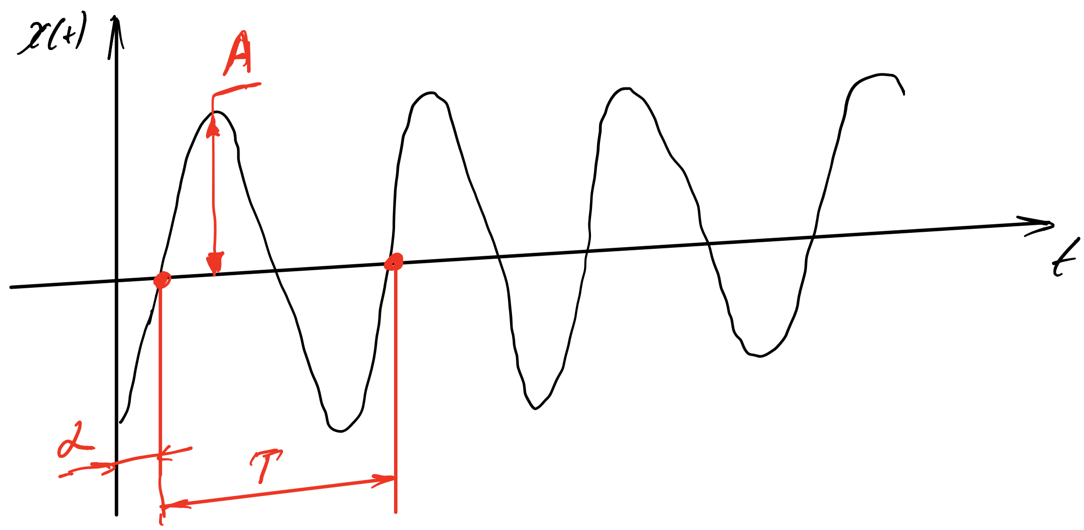
или

$$x(t) = A \cdot \sin(kt + \alpha)$$

где: A – амплитуда

k – частота, $k = \omega$

α – фаза.



Найдём зависимость периода T от параметров ДУ $\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$

Из кинематики известно, что:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt$$

$$\int d\varphi = \omega \int \cdot dt$$

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\underbrace{2\pi = k \quad T}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k \cdot T = 2\pi \quad \Downarrow \quad T = \frac{2\pi}{k}}$$

Определение A и α по начальным условиям

Пусть при $t=0$ – начальное время.

$x = x_0$ – начальное положение (координата)

$v = v_0$ – начальная скорость.

Возьмём решение ДУ $\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$ в виде:

$$x = A \cdot \sin(k \cdot t + \alpha)$$

и выполним подстановку: $x = x_0$, $t = t_0$

тогда:

$$x_0 = A \cdot \sin(k \cdot t_0 + \alpha)$$

$$t_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_0 = A \cdot \sin(\alpha)} \quad (1a)$$

Т.к. скорость $v = \frac{dx}{dt}$, то

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \sin(k \cdot t + \alpha)\right) =$$

$$= A \cdot k \cdot \cos(kt + \alpha)$$

Т.е. $\boxed{v = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot t + \alpha)}$

При $t = 0 \Rightarrow v = v_0$, тогда

$$v_0 = A \cdot k \cdot \cos(\alpha)$$

$$\boxed{\frac{v_0}{k} = A \cdot \cos(\alpha)} \quad (2a)$$

Сложим почленно квадраты равенств (1a) и (2a):

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2 = \underbrace{A^2 \cdot \sin^2(\alpha)}_{= x_0^2} + \underbrace{A^2 \cdot \cos^2(\alpha)}_{= (v_0/k)^2}$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2} = A^2 \cdot \underbrace{\left(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right)}_{= 1}$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2} = A^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}}$$

Поделим почленно равенства (1а) и (2а):

$$\frac{x_0}{\left(\frac{v_0}{k}\right)} = \frac{A \cdot \sin(\alpha)}{A \cdot \cos(\alpha)} = tg(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$tg(\alpha) = \frac{x_0 \cdot k}{v_0}$$

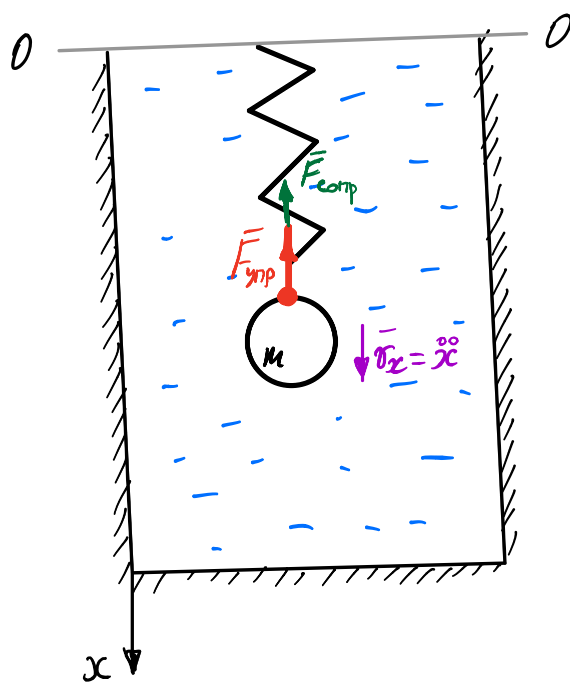
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha = arctg\left(k \cdot \frac{x_0}{v_0}\right)}$$

ДГТУ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВЯЗКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ
(ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ)



Сила упругости:

$$\bar{F}_{упр} = -c \cdot x$$

Сила вязкого сопротивления[1]

$$\bar{F}_{сопр} = -\mu \cdot v_x = -\mu \cdot \dot{x}$$

где μ – коэффициент диссипации. среды.

Дифференциальное ур-ие движения

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}$$

Раскрываем $\bar{a}$ и $\bar{F}$:

$$m \cdot \ddot{x} = -\bar{F}_{упр.} - \bar{F}_{сопр.}$$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - \mu \cdot \dot{x}}$$

1) Сила диссипации.

Разделим обе части на „m".

$$\cancel{\frac{m}{m}}\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x}$$

Обозначим: $\frac{c}{m} = k^2$; $\frac{\mu}{m} = 2\cdot b$

Тогда: $\ddot{x} = -k^2\cdot x - 2\cdot b\cdot\dot{x}$

$$\boxed{\ddot{x} + 2b\cdot\dot{x} + k^2\cdot x = 0} \quad (1)$$

Дифф. ур-ие свободных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости.

Найдём решение ур-ия (1) в виде:

$$x = e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = (e^{\lambda t})'_t = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = (\dot{x})'_t = (\lambda e^{\lambda t})'_t = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Подставим в (1):

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2 \cdot b \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0$$

Поделим обе части на $e^{\lambda t}$:

$$\boxed{\lambda^2 + 2 \cdot b \cdot \lambda + k^2 = 0}$$

характеристическое ур-ие

Найдём корни хар-ого ур-ия

$$n_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4 \cdot b^2 - 4 \cdot 1 \cdot k^2}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-\cancel{2} \cdot b \pm \cancel{2} \cdot \sqrt{b^2 - k^2}}{\cancel{2} \cdot 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}}$$

корни характеристического ур-ия

Таким образом возможны три решения

1) $k > b \Rightarrow b^2 - k^2 < 0$, т.е. выражение под знаком квадратного корня будет отрицательным, а корни будут комплексно-сопряжёнными

$$\boxed{n_{1,2} = -b \pm jk}$$

Общее решение ур-ия (1) для таких корней будет:

$$\boxed{x = e^{-b\cdot t} \cdot \left(C_1 \sin(k_1 t) + C_2 \cdot \cos(k_1 t) \right)}$$

или

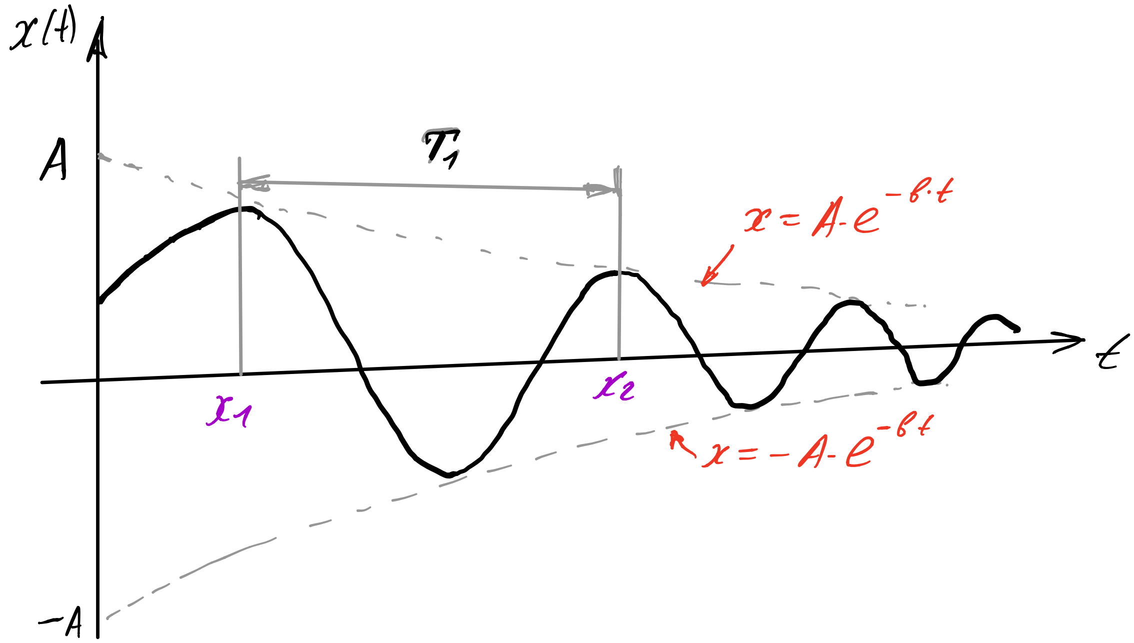
$$\boxed{x = A \cdot e^{-b\cdot t} \cdot \sin(k_1 t + \alpha)} \quad (2)$$

где: $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$;

A, α – определяются из начальных условий.

Колебания соответствующие ур-ие (2) наз. затухающими.

Из-за множителя $e^{-b\cdot t}$ амплитуда колебаний будет уменьшаться с течением времени.



Промежуток времени T_1, равный периоду $\sin(k_1 t + \alpha)$, вычисляется

$$\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}} \qquad (3)$$

период затухающих колебаний.

Размахи колебаний будут убывать по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой $e^{-b \cdot T_1}$ называется декрементом. А величина $b \cdot T_1$ — логарифмическим декрементом.

2) Пусть теперь $b > k$, если обозначить

$$b^2 - k^2 = r^2 \Rightarrow n_{1,2} = -b \pm r,$$ т.е.

корни <u>вещественные</u>. Если $r < b$ то корни ещё и меньше <u>нуля</u>!

Для этого случая решение ур-ие (1) будет иметь вид:

$$\boxed{x = C_1 \cdot e^{-(b+r)t} + C_2 \cdot e^{-(b-r) \cdot t}} \quad (4)$$

Т.е. решение не будет колебательным. Движение точки в этом случае будет монотонным и под действием восстанавливающей силы точка асимптотически приближается к положению равновесия.

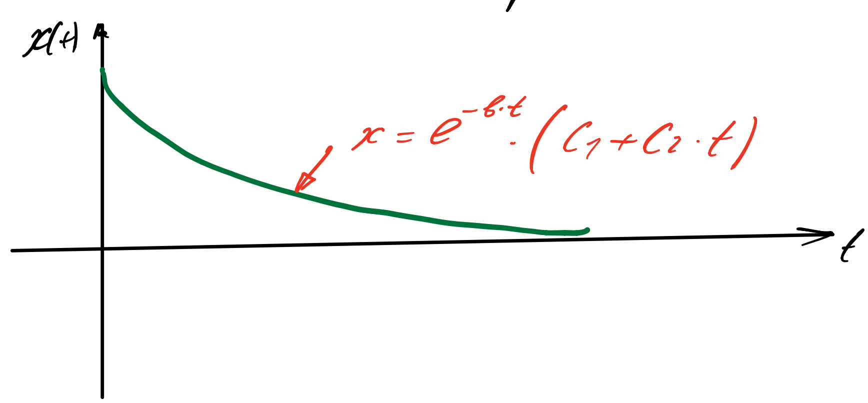
3) Пусть $b = k \Rightarrow$ корни характеристического ур-ия будут действительными но кратными

$$n_{1,2} = \pm b$$

Тогда решени ур-ия (1) будет иметь вид

$$\boxed{x = e^{-b\cdot t}\cdot\left(C_1 + C_2\cdot t\right)} \qquad (5)$$

Можно видеть, что движение не будет колебательным, а будет асимптотически стремиться к нулю.

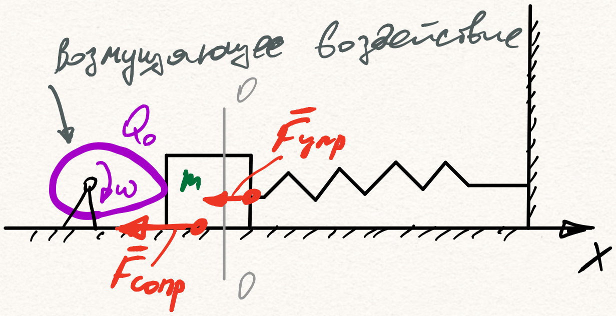


ДГТУ

трг. 241

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА.



$$\bar{F}_{упр} = c \cdot x$$

$$\bar{F}_{сопр} = \mu \cdot v_x = \mu \cdot \dot{x}$$

$$Q = Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

возмущающая сила.

Уравнение движения системы.

$$\boxed{m \cdot \bar{a} = \sum F} \qquad (1)$$

$$\bar{a} = \ddot{x}$$

$$\sum F = \sum_i F_x = -\bar{F}_{упр} - \bar{F}_{сопр} + Q$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - \mu \cdot \dot{x} + Q_0 \cdot \sin(\omega t)} \qquad (2)$$

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = Q_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \Big| \cdot \frac{1}{m}$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{Q_0}{m} \cdot \sin(\omega t)$$

Обозначим: $2b = \frac{\mu}{m}$; $k^2 = \frac{c}{m}$; $P_0 = \frac{Q_0}{m}$.

$$\boxed{\ddot{x} + 2 \cdot b \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = P_0 \cdot \sin(\omega t)} \qquad (3)$$

Дифференциальное ур-ие вынужденных колебаний точки при наличии вязкого сопротивления.

Общее решение уравнения (3) представляется в следующем виде:

$$x = x_1 + x_2$$

где x_1 – общее решение однородного ур-ия;

x_2 – частное решение неоднородного ур-ия.

Общее решение однородного ур-ия зависит от вида корней характеристического уравнения (см. лекцию №7).

Рассмотрим частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Исходя из вида правой части ур-ия (3), решение X_2 будем искать в виде

$$X_2 = B \cdot \sin(\omega t - \beta)$$

где B, β - постоянные, которые требуется определить.

Вычислим 1-ую и 2-ую производные от решения X_2 и подставим их в исходное ДУ (3)

$$\dot{X}_2 = B\cdot\omega\cdot\cos(\omega t-\beta)$$

$$\ddot{X}_2 = -B\,\omega^2\cdot\sin(\omega t-\beta)$$

Обозначим для краткости: $\psi=\omega t-\beta$
и выполним подстановку в ДУ (3)

$$\underline{-B\omega^2\cdot\sin(\psi)}+2b\cdot B\,\omega\cos(\psi)\underline{+k^2B\cdot\sin(\psi)}=$$

$$=P_0\sin(\omega t)$$

$$B\cdot(k^2-\omega^2)\cdot\sin(\psi)+2b\cdot B\cdot\omega\cdot\cos(\psi)=P_0\cdot\sin(\omega t)$$

Т.к. $\psi=\omega t-\beta \Rightarrow \omega t=\psi+\beta$

$$\sin(\omega t)=\sin(\psi+\beta)=\sin(\psi)\cdot\cos(\beta)+\cos(\psi)\cdot\sin(\beta)$$

формула сложения

$$B(k^2-\omega^2)\cdot \sin(\psi)+2b\cdot B\cdot \omega\cdot \cos(\psi)=P_0\big(\sin(-\psi)\cos(\beta)+$$
$$+\cos(-\psi)\cdot \sin(\beta)\big)$$

Коэффициенты при $\sin(-\psi)$ и $\cos(-\psi)$ в левой и правой частях должны быть равны друг другу, т.е.

$$\boxed{\begin{aligned} &B(k^2-\omega^2)=P_0\cos(\beta) \qquad &(4)\\ &2bB\omega=P_0\cdot \sin(\beta) \qquad &(5)\end{aligned}}$$

Возведём почленно в квадрат ур-ия (4) и (5) и сложим их.

$$\left[B(k^2\ \ \omega^2)\right]^2+\left[2bB\omega\right]^2=\left[P_0\cos(\beta)\right]^2+\left[P_0\sin(\beta)\right]^2$$

$$B^2\left((k^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2\right)=P_0^2\big(\underbrace{\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)}_{=1}\big)$$

$$B^2(k^2-\omega^2)^2 + 4b^2B^2\omega^2 = P_0^2$$

$$\boxed{B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}} \qquad (6)$$

Поделим почленно выражение (5) на (4)

$$\frac{2b\cancel{B}\omega}{\cancel{B}(k^2-\omega^2)} = \frac{\cancel{P_0}\cdot\sin(\beta)}{\cancel{P_0}\cdot\cos(\beta)}$$

$\mathrm{tg}(\beta)$

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{2b}{k^2-\omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{2B}{k^2-\omega^2}\right)} \qquad (7)$$

Если рассмотреть наиболее часто встречающийся случай комплексно-сопряженных корней $n_{1,2} = -b \pm jk$ характеристического ур-ия, то общее решение однородного ДУ будет иметь вид:

$$x_1 = A \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \sin(k_1 t + \alpha)$$

где A и α – постоянные интегрирования, которые определяются по начальным условиям

Тогда решение ДУ (3) будет

$$\boxed{x = \underbrace{A \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \sin(k_1 t + \alpha)}_{\text{собственные колебания}} + \underbrace{B \cdot \sin(\omega t - \beta)}_{\text{вынужденные колебания}}} \quad (8)$$

Отметим, что B и β от начальных условий не зависят.

Общие свойства вынужденных колебаний

1) Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

2) Вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают.

3) Частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависит.

4) Даже при малой возмущающей силе можно получить интенсивные вынужденные колебания (резонанс).

5) Даже при больших значениях возмущающей силы вынужденные колебания можно сделать сколь угодно малыми (св-во фильтра низких частот).

ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Рассмотрим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) колебательной системы с вязким сопротивлением.

Для этой цели нам потребуется рассмотреть ур-ие (3), но без правой части.

$$\boxed{\ddot{x} + 2 \cdot b \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = 0} \qquad (9)$$

Перейдём к операторной форме дифференциального ур-ия:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2 x = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2b\frac{d}{dt}x + k^2x = 0$$

$$\frac{d}{dt} = p$$

$$x \cdot p^2 + 2b \cdot p \cdot x + k^2 \cdot x = 0$$

$$(p^2 + 2bp + k^2) \cdot x = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x}$$

$$\boxed{p^2 + 2b \cdot p + k^2 = 0} \qquad (10)$$

характеристическое ур-ие.

Выполним формальную подстановку:

$$p = j\omega$$

$$j^2 \cdot \omega^2 + 2bj\omega + k^2 = 0$$

$$j = \sqrt{-1} \Rightarrow j^2 = \left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = -1$$

$$\underline{-\omega^2} + 2bj\omega \underline{+ k^2} = 0$$

$$\underbrace{(k^2-\omega^2)}_{U(\omega)} + j\,\underbrace{2b\omega}_{V(\omega)} = 0$$

Т.е. $U(\omega)$ — действительная часть

$V(\omega)$ — коэффициент при мнимой части.

$$U(\omega) + jV(\omega) = 0$$

Тогда АЧХ будет определяться:

$$\boxed{A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}} \qquad (11)$$

$2b = \frac{\mu}{m}$; $k^2 = \frac{c}{m}$; $P_0 = \frac{Q_0}{m}$.

$$\boxed{A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\mu}{m}\cdot\omega\right)^2}} \qquad (12)$$

Например, зададимся какими-нибудь численными параметрами:

$c = 100$ Н/м $\mu = 2\ \frac{Н \cdot с}{м}$

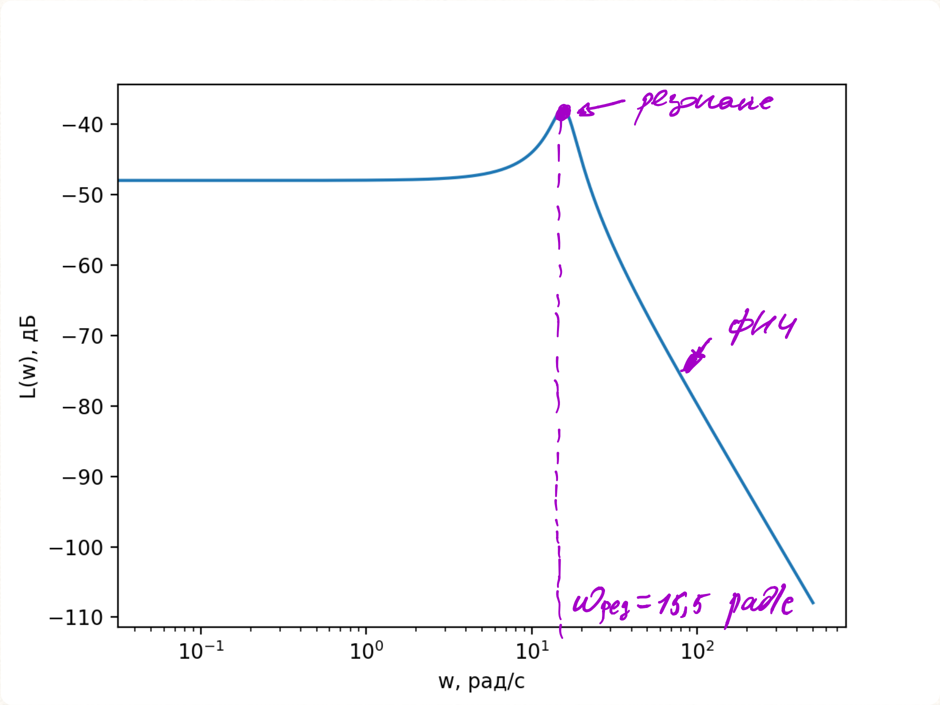
$m = 0{,}4$ кг $\omega = 0 \dots \infty$ рад/с

Построим АЧХ по выражению (12).

Для лучшей наглядности удобно использовать логарифмическую АЧХ, т.е. ЛАЧХ, которая определяется как

$$\boxed{L(\omega) = 20 \cdot \lg(A(\omega))} \quad (13)$$

Когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место явление <u>резонанса</u>.



Для того, чтобы выполнить оценку движения материальной точки нет необходимости находить аналитическое решение уравнения (3). Можно оценить движение материальной точки качественными методами. Качественные методы не дадут подробной информации о движении точки, как например, аналитическое решение (8), но качественные методы позволяют очень быстро оценить основные параметры движения материальной точки, чего часто бывает достаточно.

Одним из качественных методов оценки параметров движения является метод анализа корней характеристического уравнения (10). Данное ур-ие позволяет оценить так называемое свободное движение точки, т.е. движение без воздействия возмущающей силы.

Если мы вычислим корни ур-ия (10), то для реальной системы мы получим:

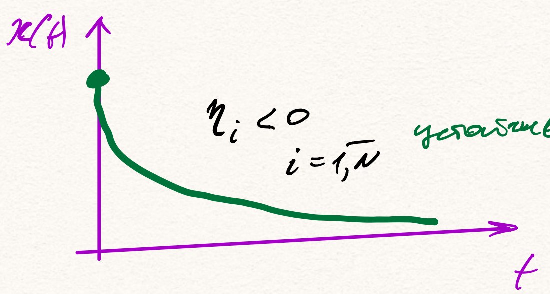
1) вещественные корни

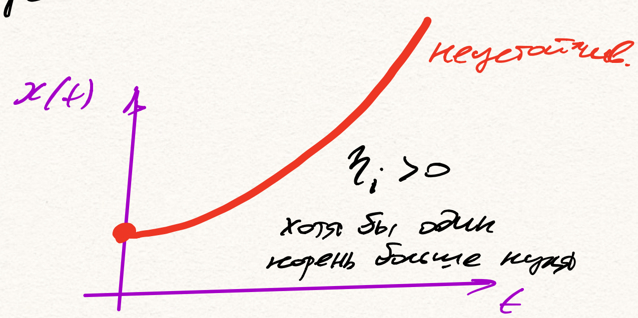
$$n_1 = \pm \eta_1 ; \quad n_2 = \pm \eta_2$$

Такие корни говорят о том, что материальная точка совершает апериодическое движение.

Если $\eta_1 < 0$ и $\eta_2 < 0$, то движение устойчивое.

Если хотя бы один из корней $\eta_i > 0$, то движение неустойчивое.





2) Комплексно-сопряжённые корни

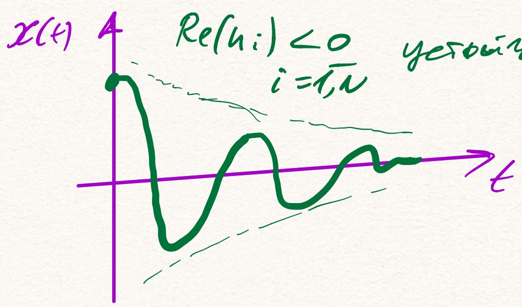
$$n_{1,2} = \pm b \pm jk$$

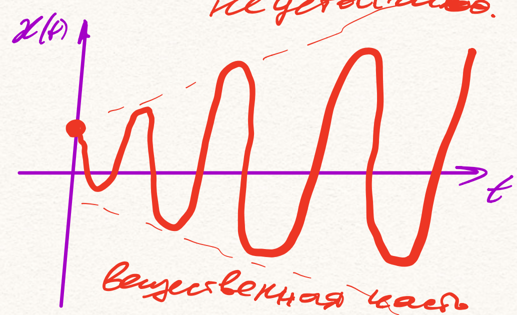
Такие корни говорят о том, что движение материальной точки будет <u>колебательным.</u>

Если веществeнные части всех корней меньше нуля $Re(n_i) < 0, i = \overline{1,n}$, то движение устойчивое.

Если вещественная часть <u>хоть одного</u>

корня будет больше нуля, то движение неустойчивое.

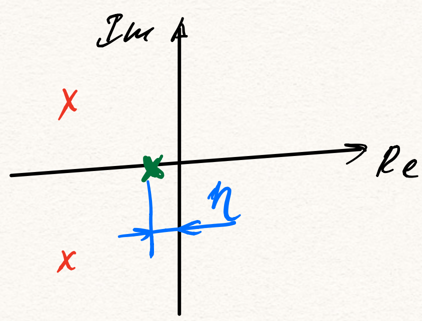




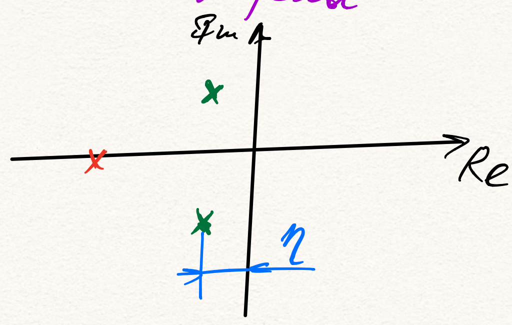
3) Если нанести вычисленные корни на комплексную плоскость, то по ближайшему корню к мнимой оси можно приближённо оценить время переходного процесса.

Если ближайший к мнимой оси

вещественный корень



комплексно-сопр. корень

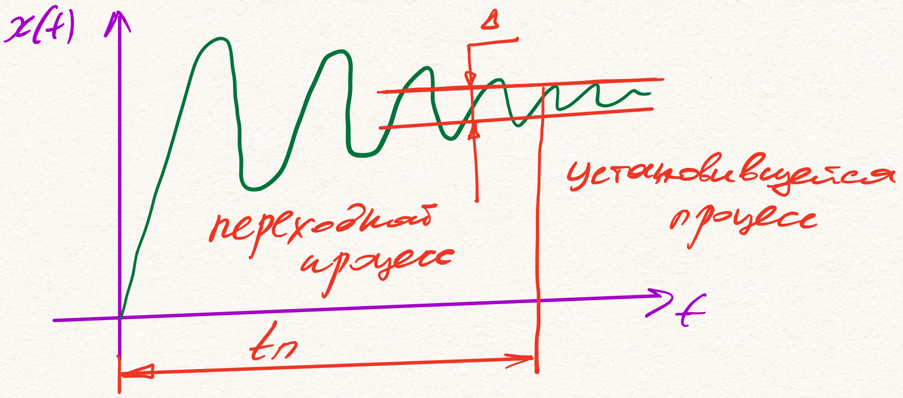


$$t_п \approx \frac{1}{\eta} \cdot \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) \qquad t_п \le \frac{1}{|\eta|} \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right)$$

приближённо равно... не больше чем...

где η – расстояние от мнимой оси до ближайшего корня.

$\Delta = 0{,}01 \ldots 0{,}05$ – „трубка" установившегося процесса



4) Для колебательного процесса можно определить период колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}$$

см. в ур-ии (10)

Так же можно оценить параметры движения материальной точки в установившемся режиме.

Для этого потребуется взять исходное ДУ (3)

$$\ddot{x} + 2\cdot b\cdot \dot{x} + k^2\cdot x = \underbrace{P_0\cdot \sin(\omega t)}_{\text{может быть любая правая часть.}}$$

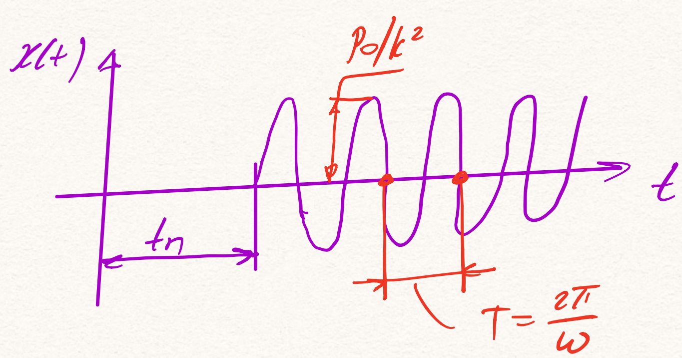
В установившемся режиме

$$\dot{x} = \ddot{x} = 0$$ (более подробно в следующих лекциях)

Тогда

$$k^2\cdot x = P_0\cdot \sin(\omega t)$$

$$x = \frac{P_0}{k^2}\cdot \sin(\omega t)$$



Кроме качественных и аналитических методов исследования движения материальной точки широкое распространение получили методы компьютерного моделирования, основанные на численном интегрировании исходного ДУ (3).

Более подробно компьютерное моделирование рассматривалось в соответствующем курсе.

Здесь лишь напомним, что для выполнения компьютерного моделирования ДУ требуется перейти к так называемой нормальной форме Коши.

ДУ в нормальной форме Коши может быть запрограммировано для его численного интегрирования.

$$\ddot{x} + 2\cdot b\cdot \dot{x} + k^2\cdot x = P_0\cdot \sin(\omega t)$$

Перейдём к нормальной форме Коши.

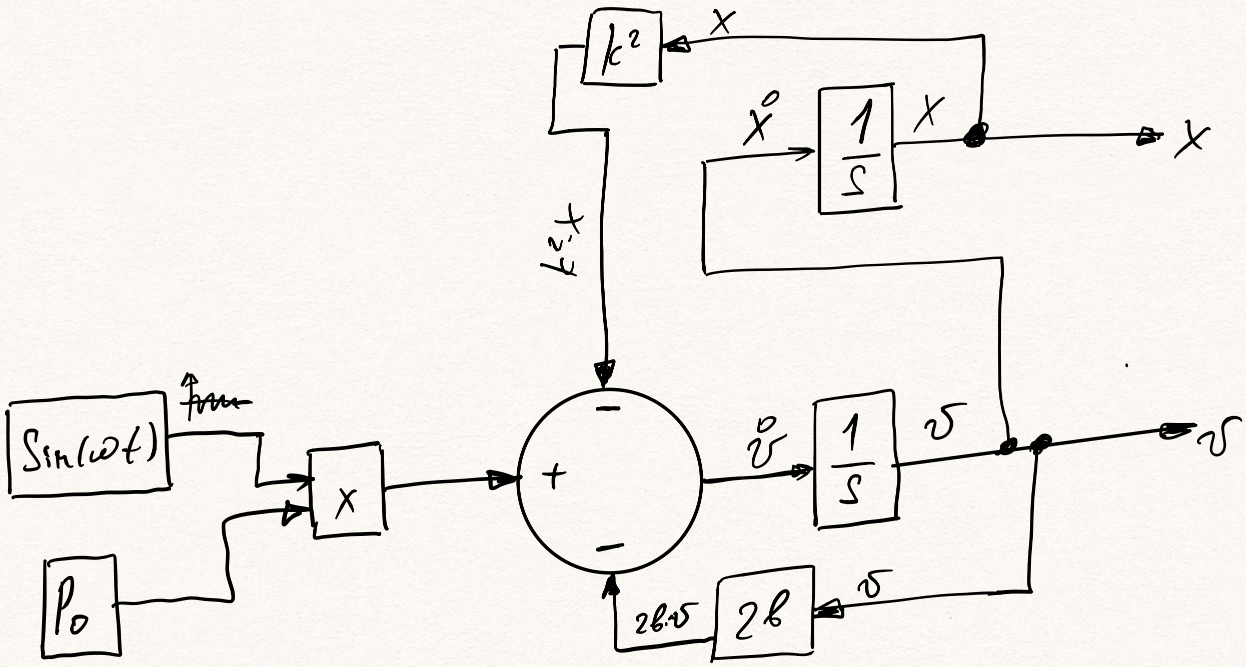
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} + 2bv + k^2\cdot x = P_0\cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = P_0\cdot \sin(\omega t) - 2b\cdot v - k^2\cdot x \end{cases}}$$

нормальная форма Коши.

По нормальной форме Коши можно построить структурную схему.

см. ↓



Структурная схема

ДГТУ

Икт. 381

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

СВЯЗИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ.

Механической системой наз. любую совокупность материальных точек.

Условия, ограничивающие перемещения точек механической системы, называются связями.
Математически связи выражаются уравнениями или неравенствами, в которые могут входить координаты, производные координат от времени, время.

Для одной точки уравнение связи в общем случае можно выразить в форме:

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ldots; t) = 0$$

Для механической системы, состоящей и N точек, l уравнений связей представляются системой уравнений:

это маленькая буква l.

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; \ldots; t) = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots, l$$

Индекс k принимает все или часть значений от 1 до N как для координат, так производных.

Если в уравнения связей входят только координаты точек и не входят производные от координат, то такие связи называются геометрическими:

$$f_s(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

Если в ур-ие связей кроме координат входят еще и их производные по времени или только одни производные, то такие связи наз. кинематическими.

В этом случае ур-ия связей являются дифференциальными уравнениями. Если удается проинтегрировать уравнения кинематических связей (это не может получиться), то из кинематических связей получают геометрические.

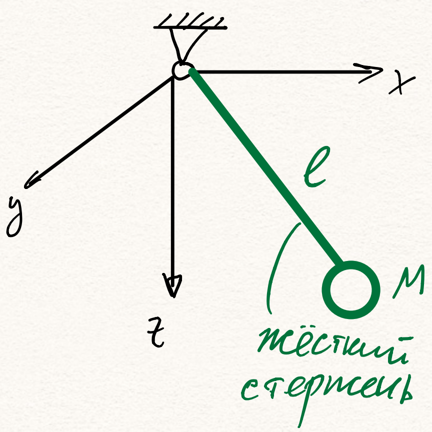
Все геометрические и интегрируемые кинематические связи называют голономными.

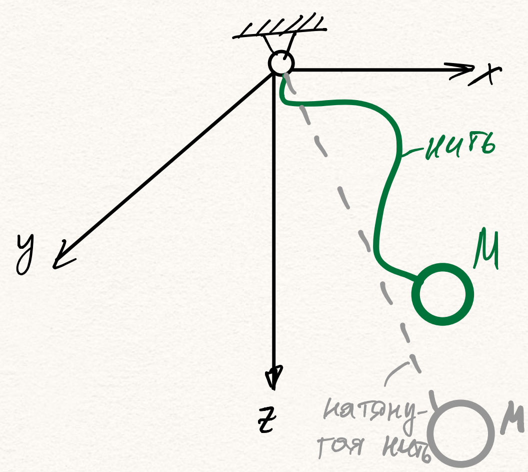
Кинематические связи, которые нельзя свести к геометрическим, являются неголономными.

Связи, в уравнения которых время явно не входит, называют стационарными или склерономными.

Если время входит явно в уравнение связи, то связь называется нестационарной или реономной.

Связи называют неосвобождающими или двусторонними, если они выражают математическими уравнениями, и освобождающими или односторонними, если они выражаются неравенствами.





$$x^2+y^2+z^2-\ell^2=0$$

двусторонняя связь

$$x^2+y^2+z^2-\ell^2\le 0$$

односторонняя связь.

Обобщенные координаты системы

Пусть система состоит из N точек, тогда её положение в пространстве в каждый момент времени определяется $3N$ координатами точек системы, например, декартовыми координатами x_k, y_k, z_k.

Если на систему наложены голономные связи

$$f_s(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad s = \overline{1, l}$$

Тогда можно найти число независимых координат

$$n = 3N - l.$$

То есть любые n декартовых координат можно задать независимо друг от друга, а остальные координаты определятся из уравнений связей.

Вместо n независимых декартовых координат можно выбрать любые другие независимые параметры $q_1, q_2, \ldots, q_n$, которые в свою очередь будут зависеть от всех или части декартовых координат точек системы.

Эти независимые параметры, определяющие положения системы в пространстве, называются обобщёнными координатами.

$$q_i = q_i(x_k, y_k, z_k),\ k = \overline{1, N}.$$

Задание обобщённых координат полностью определяет положение точек системы относительно выбранной системы отсчёта, например декартовых осей координат.

Используя выражения обобщённых координат и уравнения связей, при разрешимости этой системы уравнений выразить декартовы координаты через обобщённые, т.е.

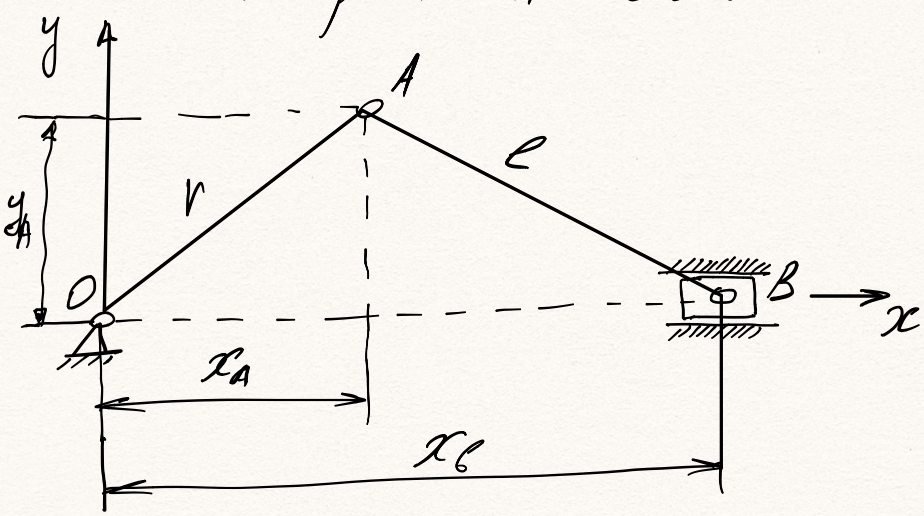
$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t);$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t);$$

$$z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t);$$

Число независимых обобщённых координат системы равно числу степеней свободы голономной системы, т.е. $n = 3N - \ell$.

Пример. Определение обобщённых координат системы



Кривошипно-шатунный механизм

Положение данного механизма определяется тремя точками: O, A и B

Координаты этих точек:

$$O(0,0);\ A(x_A, y_A);\ B(x_B; 0)$$

Из всех координат только три не равны нулю, это:

x_A, y_A, x_B.

То есть $3N = 3$

Для этой системы можно составить два ур-ия связей:

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = r^2 \\ (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = l^2 \end{cases}, \text{ т.е } l = 2$$

Тогда $n = 3N - l = 3 - 2 = 1$

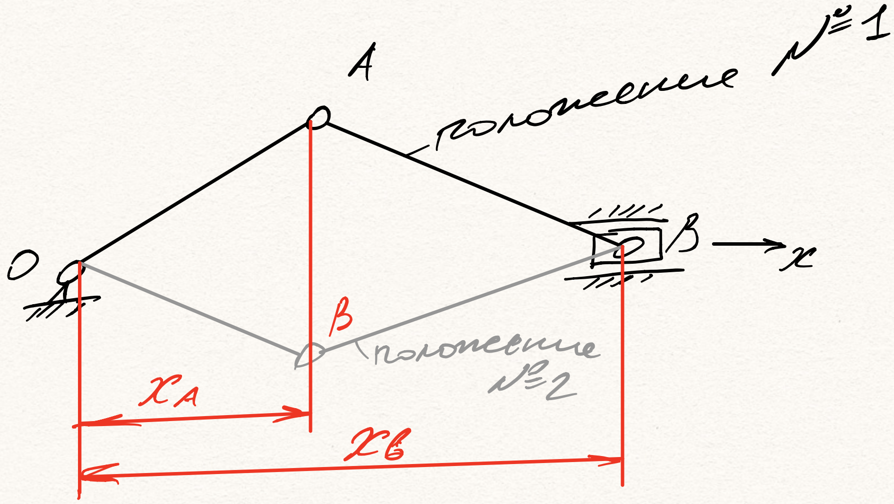
Число степеней свободы $n = 1$.

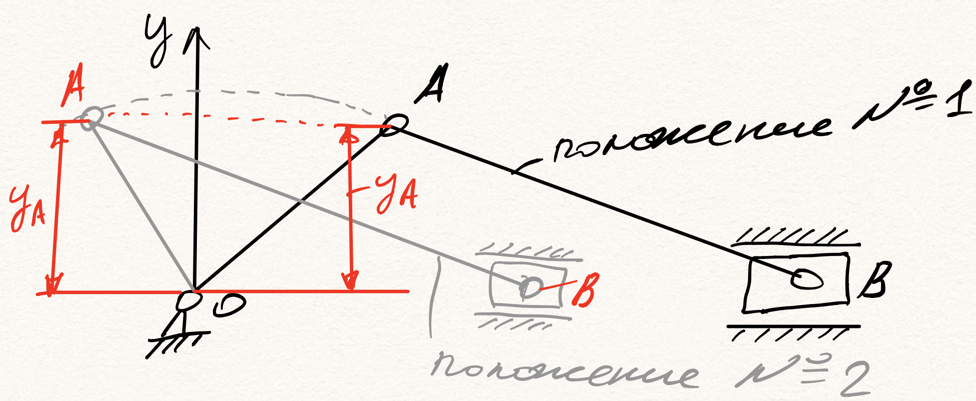
Это означает, что из трёх не равных нулю координат только одну можно задать независимо, а две другие координаты выражаются через эту независимую координату как решения уравнений связей.

Требование к обобщенной координате — она должна однозначно определять положение механизма относительно осей координат Oxy.

Может ли хоть какая из трёх координат x_A, x_B, y_A однозначно определить положение механизма? Ответ — нет!

Покажем, что ни одна из трёх координат не могут быть обобщёнными координатами.





т.е. существует по крайней мере 2-ва положения при котором коор-ты x_A, x_B, y_A будут иметь одинаковые значения, т.е. ни одна из этих координат однозначно не определяет положение механизма.

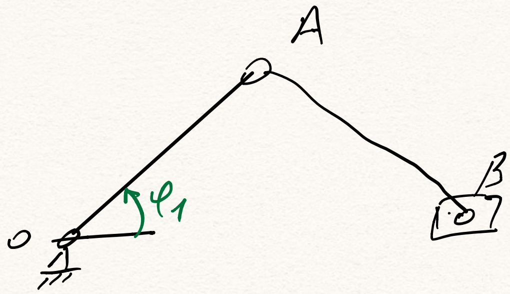
В качестве обобщённой координаты нужно искать функцию от декартовых координат x_A, x_B, y_A.

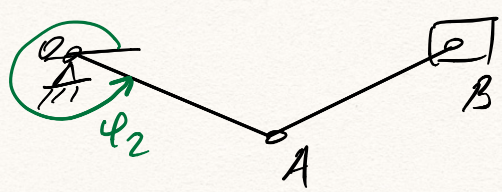
$$q = q(x_A, x_B, y_A);$$

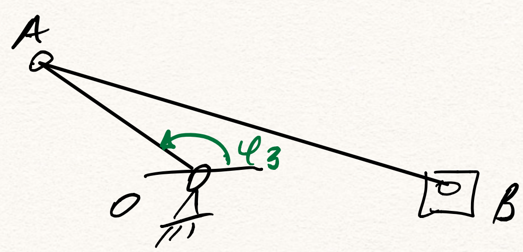
и такая функция есть

$$q = \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)$$

Проверим:





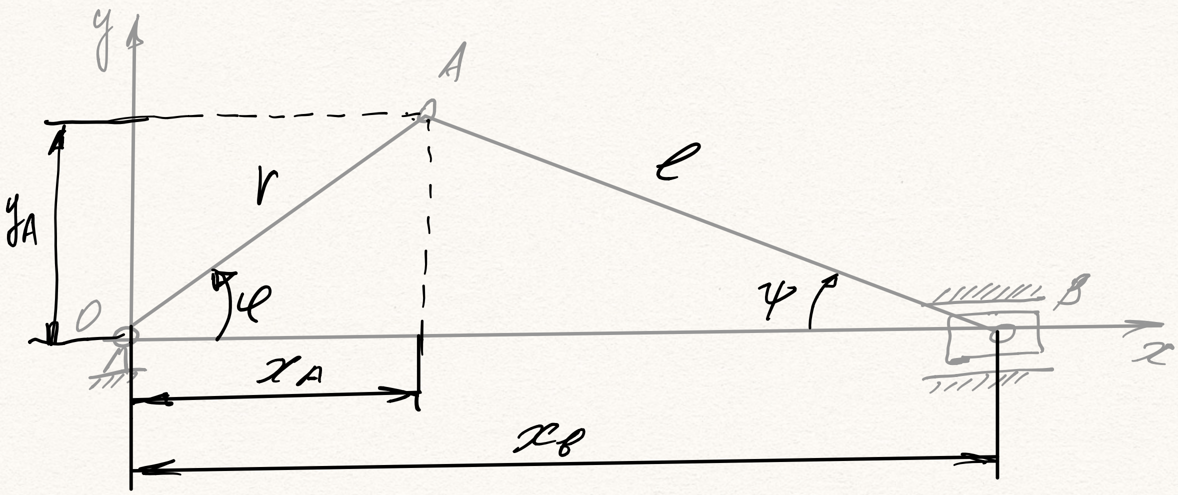


$$\varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{q = \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_A}{x_A}\right) \text{ — обобщённая координата.}}$$

Теперь выразим координаты x_A, x_B и y_A через обобщённую координату φ.



$$x_A = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$x_B = r \cdot \cos(\varphi) + l \cdot \cos(\psi)$$

$$y_A = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$\sin^2(\psi) + \cos^2(\psi) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\psi) = \sqrt{1 - \sin^2(\psi)} = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2(\varphi)}$$

Tonda:

$l^2\cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi) = l^2$

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= r \cdot \cos(\varphi) \\ x_B &= r \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin(\varphi)} \\ y_A &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}}$$

Икт. 385

ДГТУ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ.

ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ.

Элементарная работа силы на возможном перемещении ее точки приложения вычисляют по обычным формулам для элементарной работы:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta r_k$$

где δr_k – возможное перемещение.

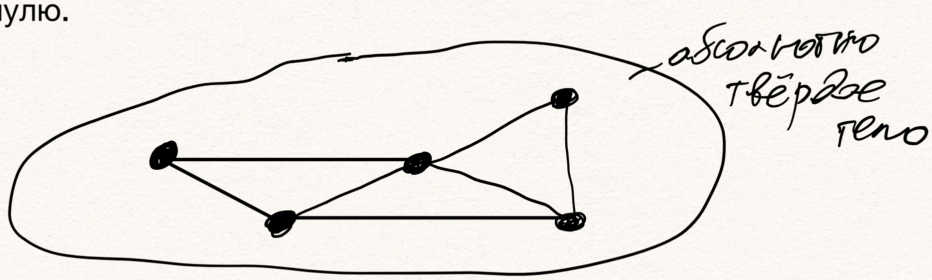
Элементарная работа сил при этом зависит от выбора возможного перемещения системы. Обозначим реакции связей для точек системы $\bar{R}_k$.

Тогда можно ввести определение идеальных связей: ***связи системы называются идеальными, если для любого возможного перемещения системы выполняется условие***

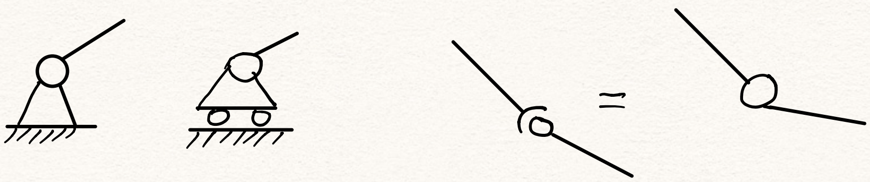
$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$$

Существуют следующие типовые идеальные связи.

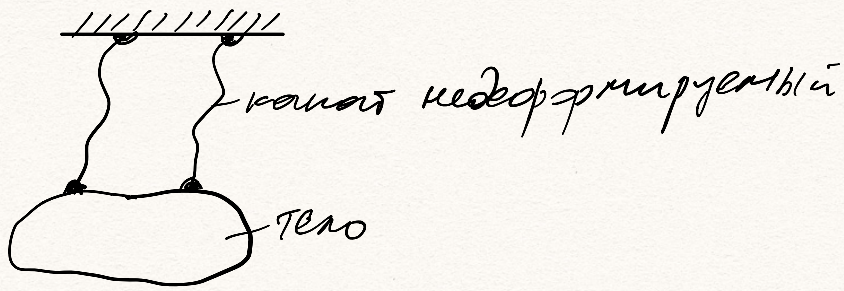
1) В абсолютно твердом теле точки связаны внутренними силами, для которых сумма элементарных работ, для любого элементарного перемещения точек системы, равна нулю.



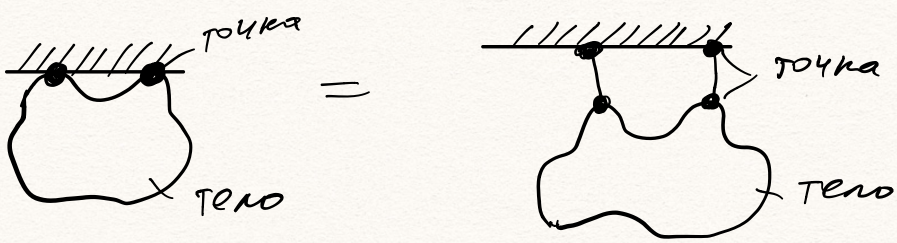
2) Абсолютно гладкая поверхность является идеальной связью. Например, шарниры (подвижные и неподвижные) принимаются, как правило, шарнирами без трения, что соответсвует абсолютно гладкой поверхности в шарнирном соединении.



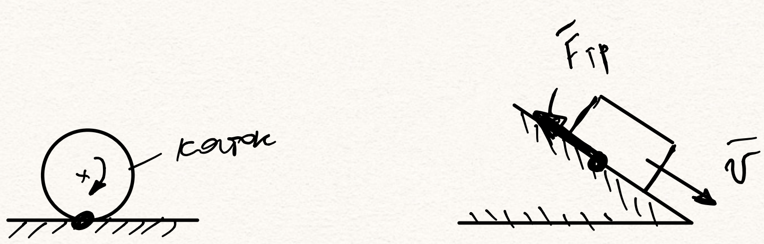
3) Гибкие нерастяжимы связи. Например, недеформируемые канаты.



4) Закрепленные точки (идеальные точки сварки).



5) Шероховатая поверхность для катков, которые катятся по ней без скольжения и при отсутствии трения качения (не путать с трением скольжения!).
При скольжении же тела по шероховатой поверхности добавляют силу трения, которая направлена противоположно направлению движения тела.



ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ.

Сумма элементарных работ сил, действующих на точку системы на её возможном перемещении:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k$$

Если система голономная и имеет n степеней свободы, то ее положение в пространстве будет определяться n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$
Тогда для $\delta \bar{r}_k$

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

Справка:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

Таким образом получим выражение обобщенной силы, отнесенной к обобщенной координате

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right)}_{\delta r_k} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

То есть обобщенная сила будет определяться

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} F_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$$

Обобщенную силу Q_i можно записать в декартовой системе координат

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы на оси координат;

x_k, y_k, z_k – координаты точки приложения силы $\bar{F}_k$.

Так как

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i$$

то размерность обобщенной силы, в общем случае, будет определяться следующим образом:

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]} = \frac{[A]}{[q_i]}$$

Вычисление обобщенной силы. Существует несколько способов вычисления обобщенной силы. Наиболее удобным на практике является следующий.

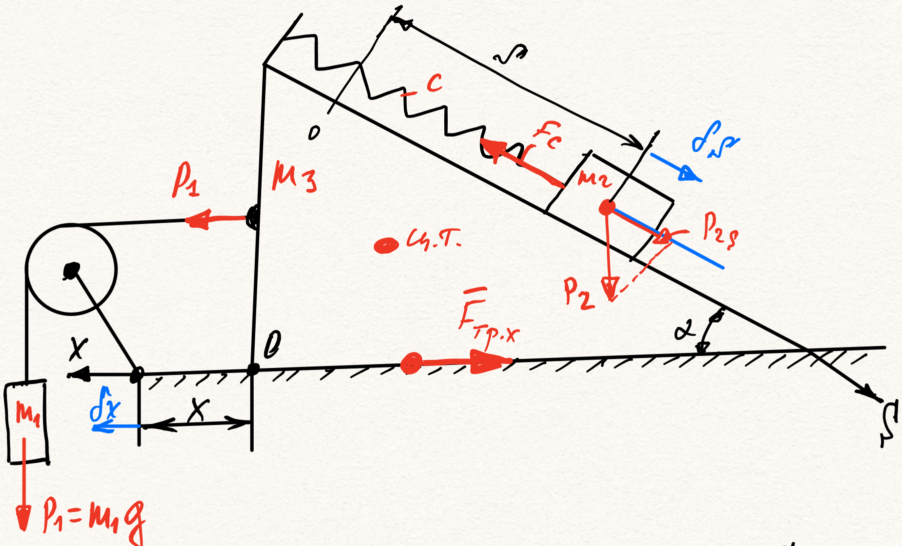
Необходимо сообщить системе такое ВОЗМОЖНОЕ перемещение, при котором изменяется только ОДНА обобщенная координата, а другие обобщенные координаты не изменяются. То есть $\delta q_1 \neq 0$, а остальные $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$

$$Q_1 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_{q_1}}{\delta q_1}$$

Индекс q_1 указывает, что сумма элементарных работ вычисляется на возможном перемещении, при котором изменяется только координата q_1. Если изменяется координата q_i, то

$$Q_i = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_{q_i}}{\delta q_i}$$

ПРИМЕР. Определить обобщённые силы для механической системы.



Зафиксируем координату s, система может совершать движение по координате x. Теперь ещё зафиксируем координату x — движение системы будет невозможно.

Таким образом у механической системы две степени свободы.

Обобщёнными координаты: $q_1 = x$

$q_2 = s$

Найдём возможное перемещение системы по координате $-\delta q_1 = \delta x$, при этом $\delta q_2 = \delta s = 0$.

$$Q_x = \frac{\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \delta \bar{r}_k\right)_x}_{=\delta A}}{\delta x} = \frac{P_1 \cdot \cancel{\delta x} - F_{тр.x} \cdot \cancel{\delta x}}{\cancel{\delta x}} = P_1 - F_{тр.x}$$

Теперь найдём возможное перемещение по обобщённой координате $-\delta q_2 = \delta s$, $\delta q_1 = \delta x = 0$.

$$Q_s = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} F_k \delta \bar{r}_k\right)_s}{\delta s} = \frac{P_{2s} \cdot \cancel{\delta s} - F_c \cdot \cancel{\delta s}}{\cancel{\delta s}} = P_{2s} - F_c$$

Раскроем силы:

$$P_1 = m_1 \cdot g$$

$$F_{тр.x} = h \cdot \frac{dx}{dt} = h \cdot \dot{x}$$

$$P_{2s} = P_2 \cdot \sin(\alpha) = m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$F_c = c \cdot s$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{Q_x = m_1 \cdot g - h \cdot \dot{x}}$$

$$\boxed{Q_s = m_2 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - c \cdot s}$$

Гр. 376, Икт. 407

ДГТУ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА 2-ГО РОДА.

Прежде всего уравнения Лагранжа 2-го рода (далее просто уравнения Лагранжа) нам необходимы для решения задач теории колебаний.
Поэтому давай рассмотрим вопрос о том, как же применят уравнения Лагранжа.
Основная форма уравнения Лагранжа 2-го рода имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1,n}} \qquad (1)$$

где T - кинетическая энергия всей системы;
q_i - i-ая обобщённая координата;
$\mathring{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$ - i-ая обобщённая скорость;
Q_i - i-ая обобщённая сила.

Уравнение Лагранжа 2-го рода (1) представляет собой дифференциальное уравнение движения системы в обобщенных координатах, при этом число этих уравнений равно числу степеней свободы системы.

По своей сути, уравнения Лагранжа (1) представляют собой общую математическую модель механической системы, НО ТОЛЬКО ДЛЯ СИСТЕМ С ГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ!

Наша задача научиться из общей математической модели механической системы, то есть из уравнения Лагранжа 2-го рода получать математические модели конкретных исследуемых механических систем.

В конечном итоге мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для каждой степени свободы системы. То есть самая простейшая механическая система будет представлена одним обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. А если у нас система имеет, например, три степени свободы, то математическая модель такой механической системы будет представлена системой их трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Существует некоторый порядок работы с уравнениями Лагранжа 2-го рода, который позволяет перейти от общей записи уравнений Лагранжа к математической модели конкретной механической системы. Также, именно здесь, нам пригодятся знания по тем вопросам, которые мы начали рассматривать с самого начала семестра.

При составлении уравнений Лагранжа 2-го рода для конкретной механической системы рекомендуется следующий порядок действий:

1) установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты;

2) изобразить систему в произвольном положении и показать на рисунке все действующие силы (если рассматривается система только с идеальными связями, то изображаются только активные силы). Такой рисунок ещё называют расчетной схемой или концептуальной моделью;

3) определить кинетическую энергию T системы при её движении относительно инерциальной системы отчета и выразить кинетическую энергию T системы через обобщенные координаты qi и обобщенные скорости dqi/dt;

4) подсчитать соответствующие частные производные от T по qi и dqi/dt;

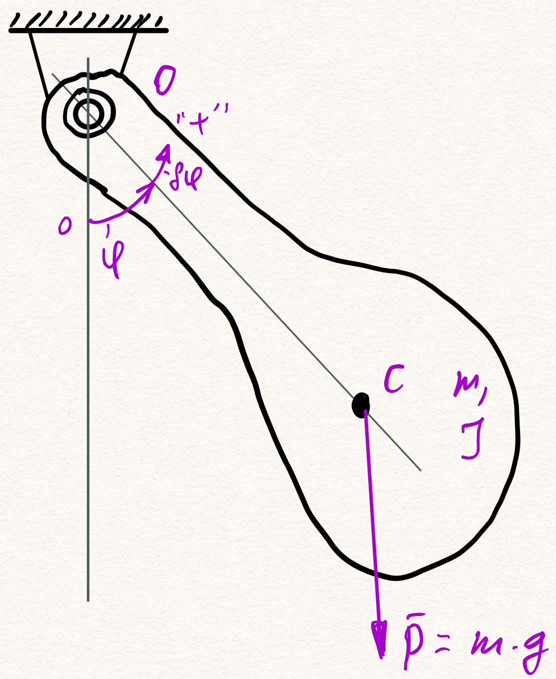
5) вычислить обобщенные силы Qi, при этом во избежании ошибок в знаках обобщенных сил, каждое сообщаемое системе возможное перемещение должно быть направленно так, чтобы приращение соответствующей координаты было положительным;

6) подставить все найденые величины в уравнение Лагранжа 2-го рода.

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих как можно пользоваться уравнением Лагранжа 2-го рода для получения математической модели конкретной механической системы.

Пример №1.

Найти дифференциальное ур-ие колебаний физического маятника.



У маятника 1-на степень свободы о она определяется углом φ, т.е.

$\varphi = q_1$

Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

$$\omega = \varphi \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} J \cdot (\dot{\varphi})^2$$

Тогда:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} J (\dot{\varphi})^2 \right) \Bigg|_{\frac{J}{2} = Const} =$$

$$= \frac{J}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} (\dot{\varphi})^2 = \frac{J}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \dot{\varphi} = J \dot{\varphi}$$

Т.е. $\quad \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J \dot{\varphi}$

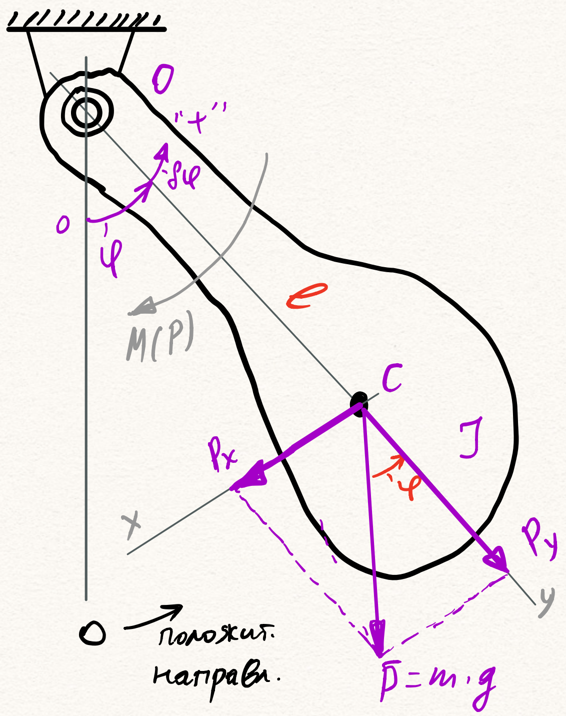
Далее : $\quad \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dfrac{d}{dt} (J \dot{\varphi}) \Big|_{J = Const} =$

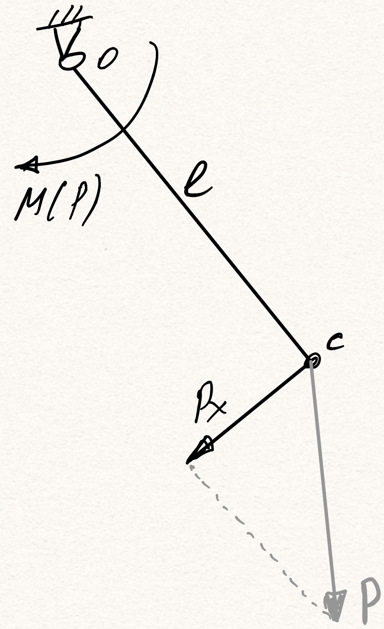
$$= J \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = J \cdot \ddot{\varphi}$$

Далее : $\quad \dfrac{\partial T}{\partial q} = \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \left(\dfrac{1}{2} J (\dot{\varphi})^2 \right) = 0$

Найдём обобщённую силу $Q_i = Q_\varphi$

$$\boxed{Q_i = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_{q_i}}{\delta q_i}}$$





$M = P_x \cdot OC = P_x \cdot \ell$

$$Q_\varphi = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k\right)_\varphi}{\delta\varphi} = \frac{M(P) \cdot \cancel{\delta\varphi}}{\cancel{\delta\varphi}} = M(P)$$

$$M(P) = P_x \cdot OC \Big|_{OC=\ell} = P_x \cdot \ell$$

$$P_x = P \cdot \sin(\varphi) \ ; \quad P = m \cdot g$$

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow \underline{M(P) = m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi)}$$

$$\Downarrow$$

т.е. $\boxed{Q_\varphi = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi)}$

Теперь собираем все составляющие вместе согласно ур-ию Лагранжа 2-го рода.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\boxed{J \cdot \ddot{\varphi} = -l \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi)}$$

Математическая модель колебательной системы "физический маятник".

ДГТУ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Колебания в нелинейной системе. Автоколебания.

Понятие об автоколебаниях.

Автоколебания представляют собой незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, вид и свойства которых определяются структурой самой системы и не зависят от начальных условий. Также важно отметить, что автоколебания поддерживаются за счет постоянного источника энергии. Постоянного в смысле непериодического источника энергии.

Автоколебания бывают

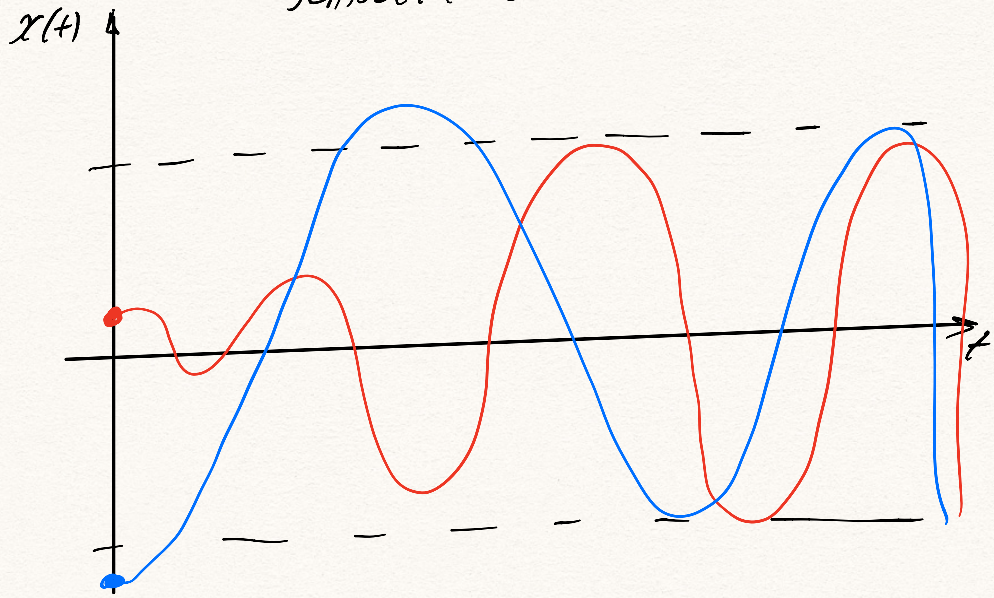
устойчивые

неустойчивые

полуустойчивые

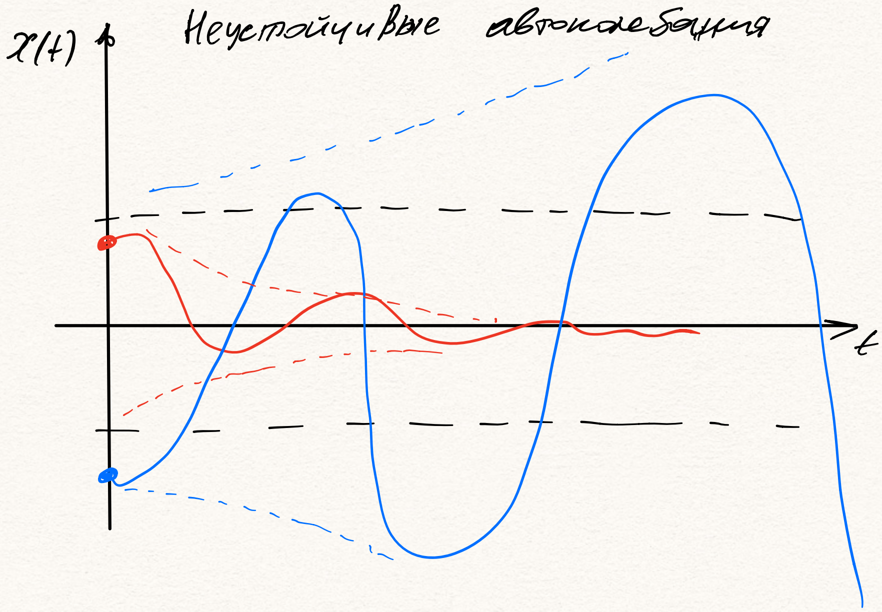
Рассмотрим как будут отображаться различные типы автоколебаний на графиках.

Устойчивые автоколебания



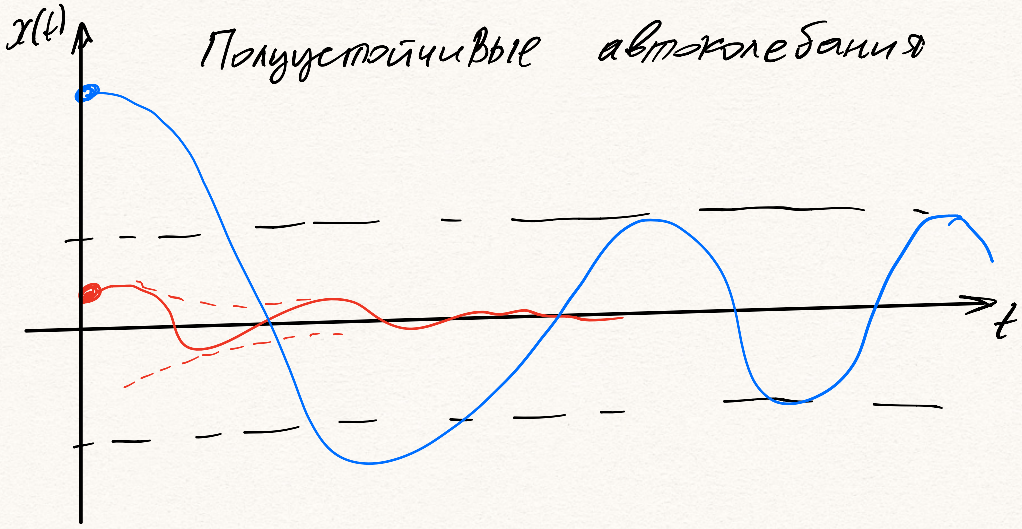
То есть мы может взять начальные условия очень близкие к нулю или достаточно отдаленные, но все равно траектория придет к установившимся колебаниям с определенной амплитудой и частотой.

Неустойчивые автоколебания



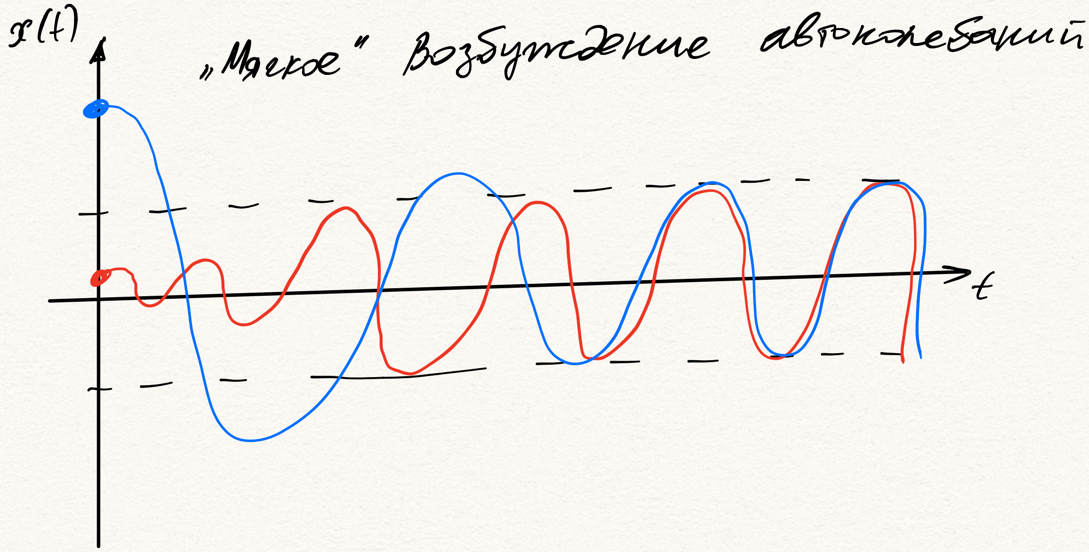
Здесь все наоборот, какие бы мы не брали начальные условия, устойчивых колебаний не формируются.
При малых начальных условиях колебания затухают, при больших — система вообще становиться неустойчивой.

Полуустойччивые автоколебания - это разновидность неустойчивых автоколебаний.

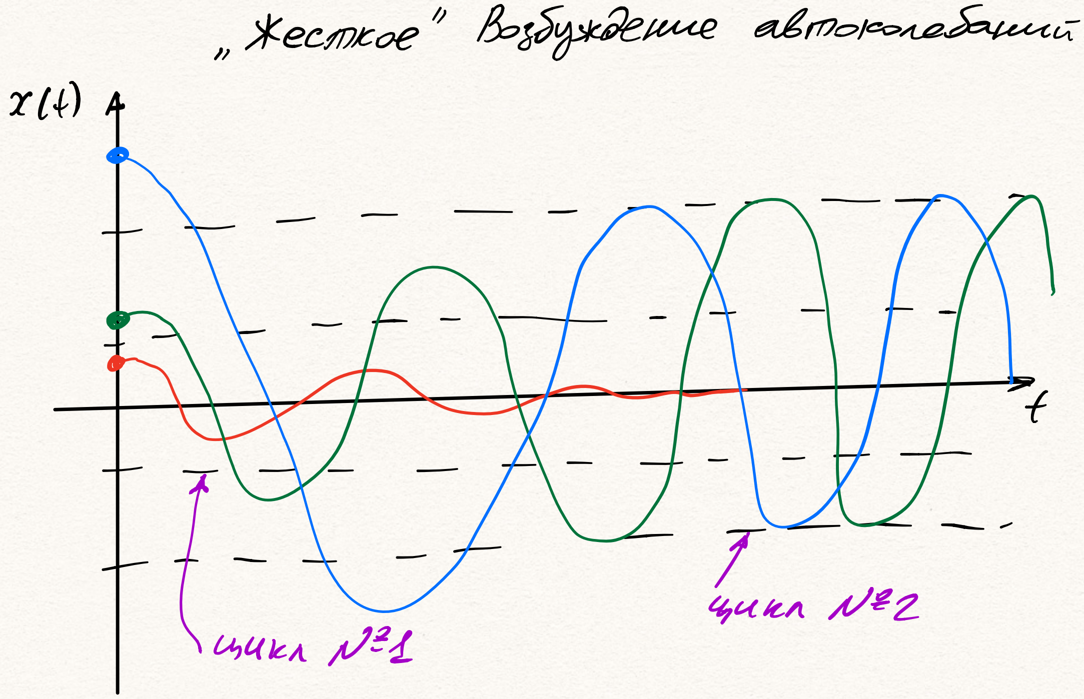


У таких траекторий такая особенность. При больших начальных условиях устанавливаются автоколебания, а при малых колебательный процесс затухает. Но даже если автоколебаний установились, все равно система не является грубой и при вариации параметров колебания могут затухнуть.

Если при любых начальных условиях (конечно же в некоторой области) возникают автоколебания, то такой вариант называется "мягким" возбуждением автоколебаний.



Но бывает и другой вариант возбуждения автоколебаний. Когда необходимо начальные условия "забрость" в определённую область.



То есть если, например, начальные условия будут в переделах цикла № 1, то автоколебаний не возникнет - колебания затухнут. А для образования автоколебаний необходимо чтобы начальные условия были "заброшены" за пределы цикла № 1.

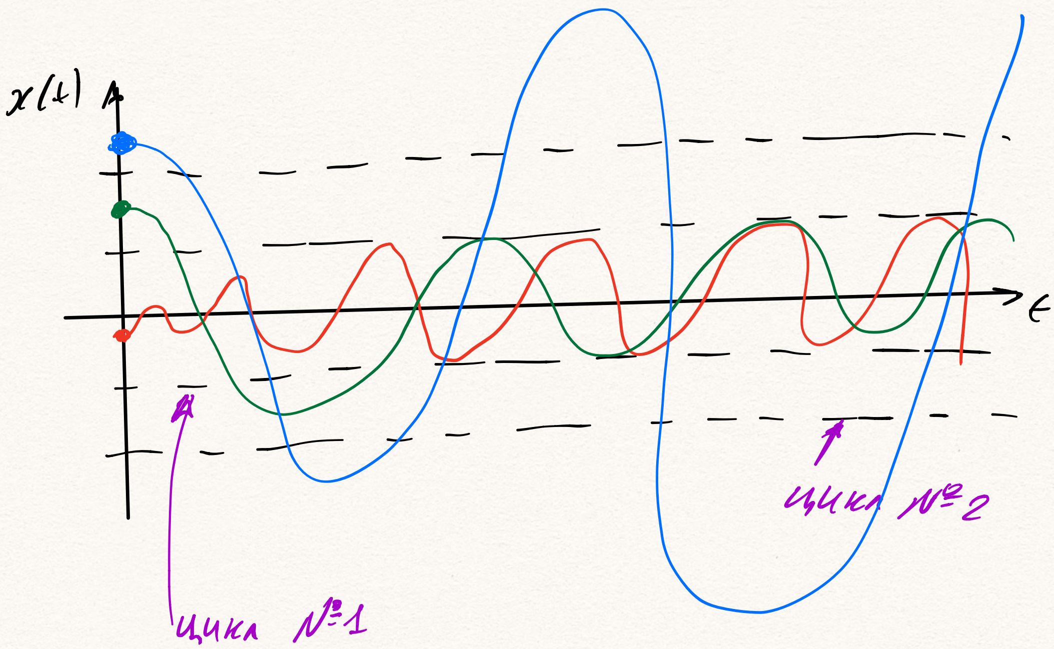
Такой вариант возбуждения автоколебаний называется - "жестким".

И еще два понятия связанных с автоколебаниями.

Первое - это так называемые автоколебания устойчивые в "малом", но не устойчивые в "большом".

То есть если начальные условия лежат вблизи цикла № 1, то развиваются устойчивые колебательные движения - автоколебания, но если начальные условия лежат за пределами цикла № 2, то система становиться неустойчивой, амплитуда колебаний растет бесконечно.

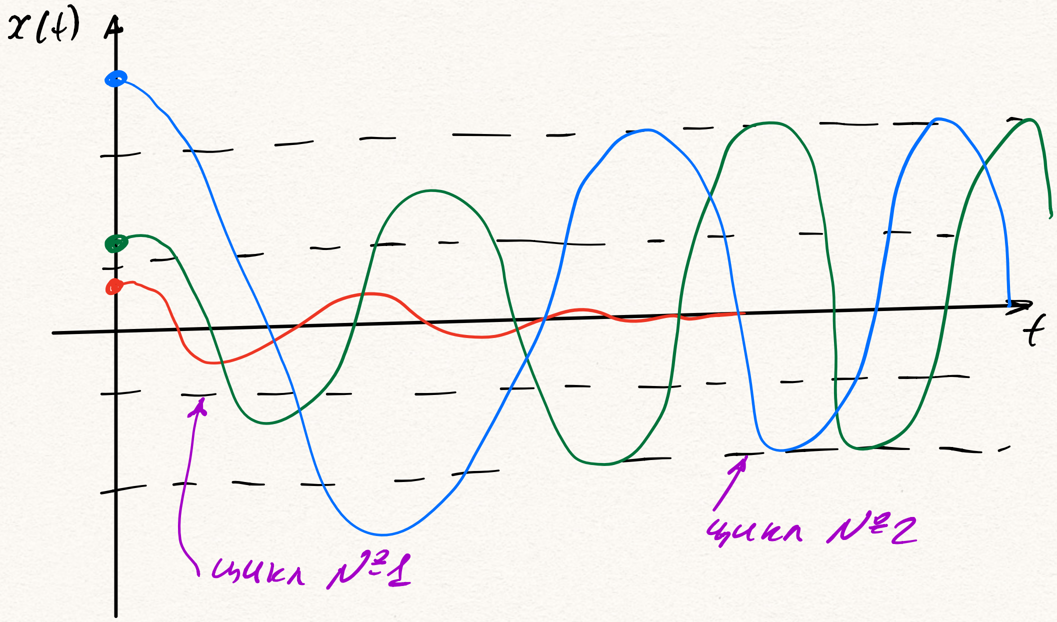
Автоколебания устойчивые в „малом", но неустойчивые в „большом"



А вот вариант, который мы рассматривали выше, когда говорили об "жестком" возбуждении автоколебаний, наоборот, имеет затухающие колебания при выборе начальных условий внутри цикла № 1 и если начальные условия выбирать за пределами цикла № 1, вблизи окрестности цикла № 2, то развиваются устойчивые колебания - автоколебания.

Такой вариант автоколебаний называется - неустойчивые в "малом", но устойчивые в "большом".

Автоколебания устойчивые в „большом", но неустойчивые в „малом"



Этот тот минимум, который требуется знать про автоколебания в нелинейных системах на данном уровне Вашего образования.

Основные положения метода гармонической линеаризации.

А теперь давайте рассмотрим один важный инженерный метод обнаружения автоколебательного движения и установления значений его параметров.

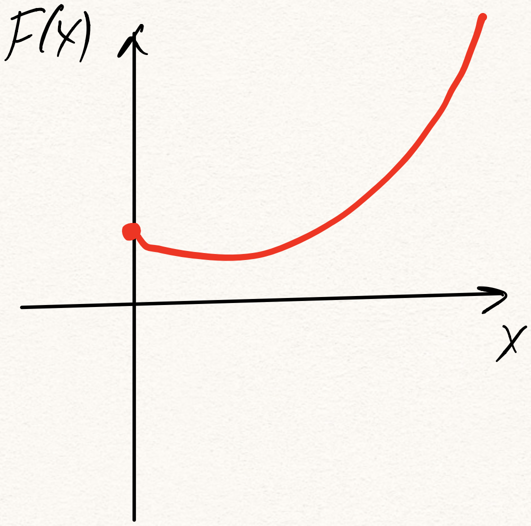
Этот метод называется метод гармонической линеаризации или метод гармонического баланса.

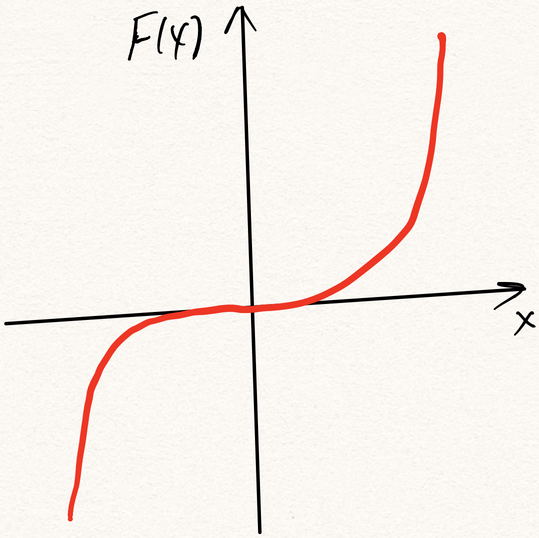
Мы будем рассматривать самый простейший случай, когда в системе имеется всего одно нелинейное звено, которое реализует статическую нелинейность, то есть когда нелинейность задана как функция от координаты (именно от координаты, а не от какой-либо производной координаты), так же мы будем рассматривать статические нелинейности, которые зависят только от одной координаты.

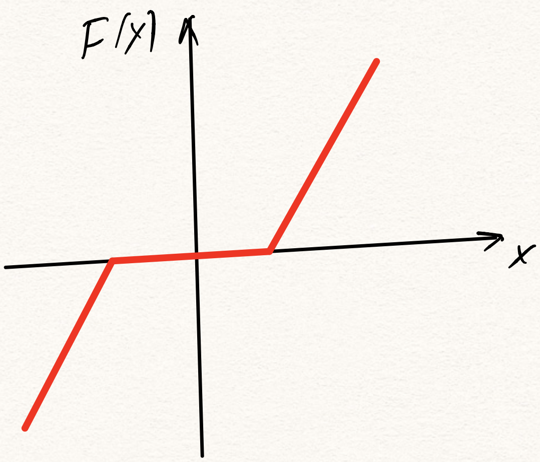
Примеры таких статических нелинейностей показаны на рисунке.

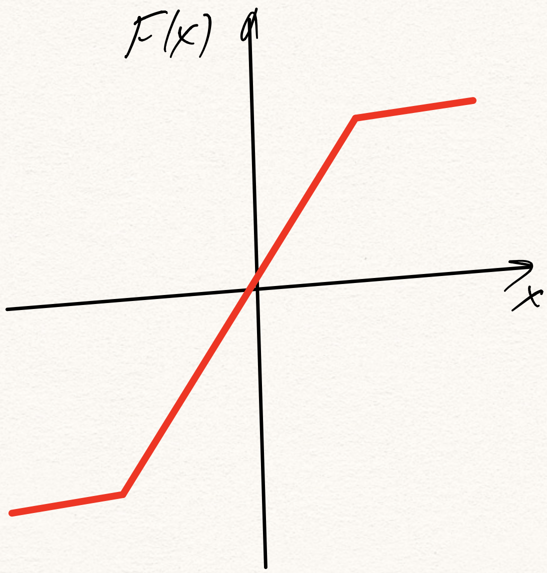
см.

Некоторые типы статических нелинейностей





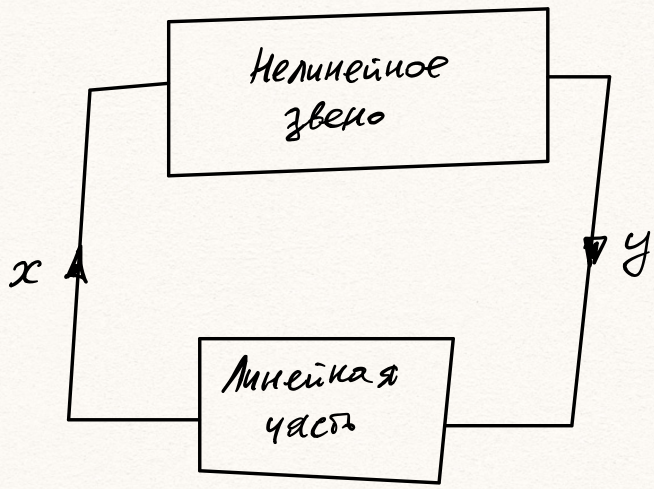




и др.

Также при рассмотрении нелинейной системы, кроме нелинейного звена выделяют еще и линейную часть системы.

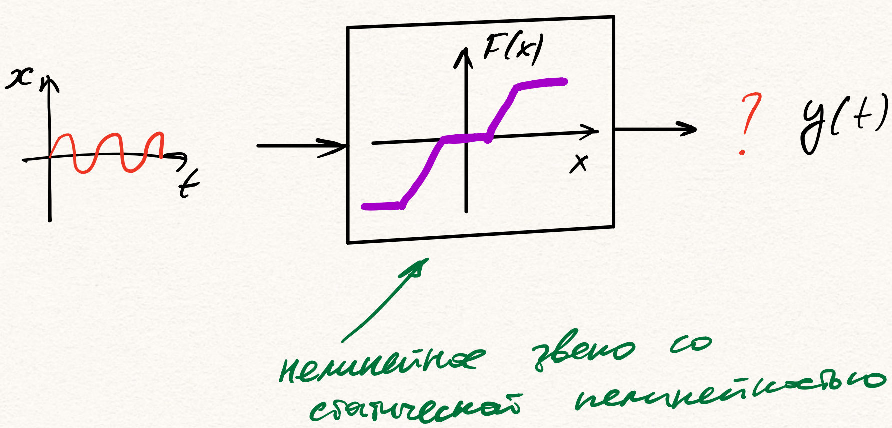
Укрупнено такую систему можно рассмотреть в виде следующей схемы.



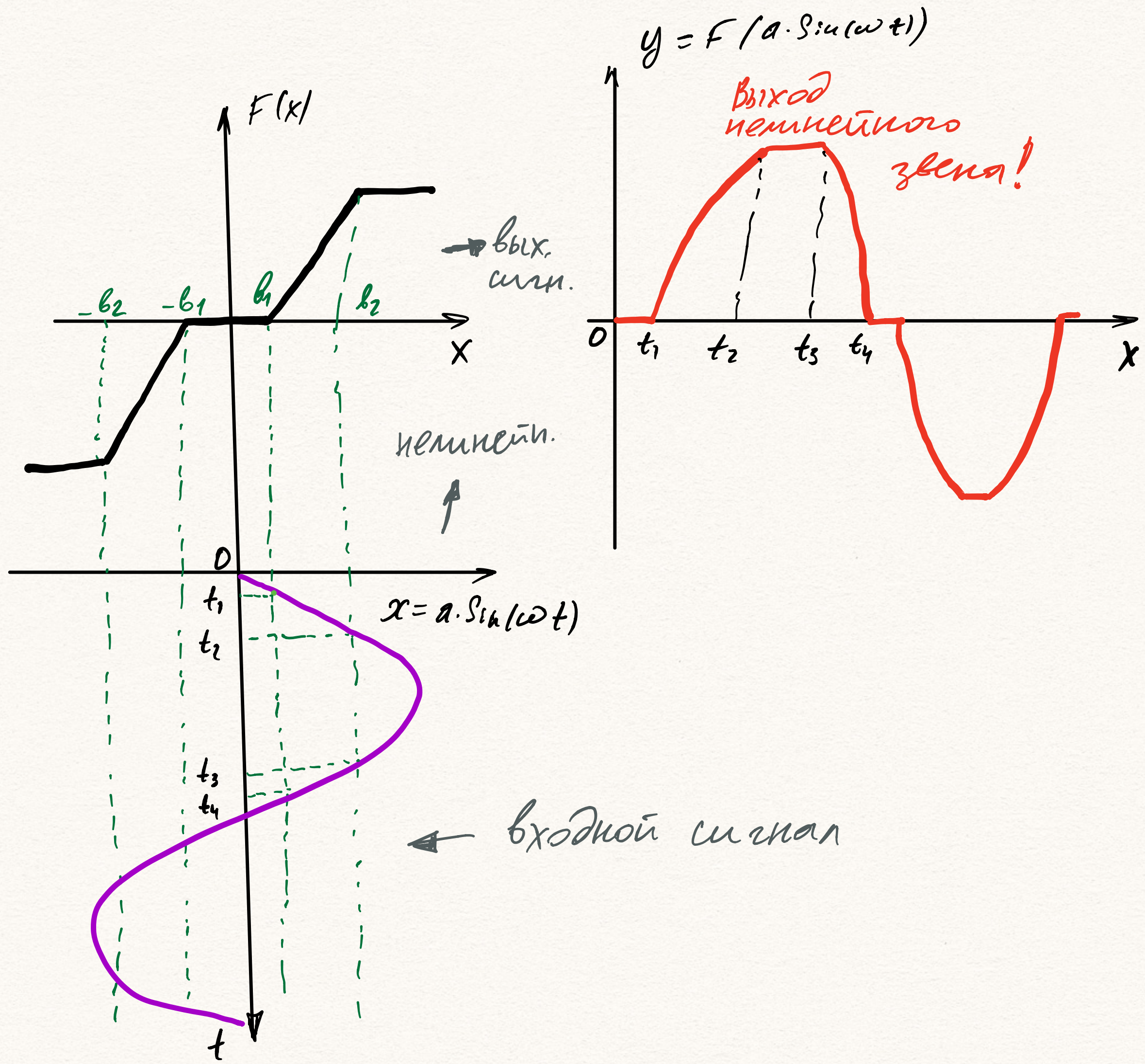
Пусть у в нашей гипотетической системы только одна нелинейность и эта нелинейность является статической.

Подадим на вход этой нелинейности, или лучше сказать нелинейного звена, гармонический сигнал

$$x = a \cdot \sin(\omega t) \qquad (1)$$



В результате получим решение, которое можно найти графически.



То есть, когда, входной сигнал x = a*sin(wt) попадает на область 0...b1 (область нечувствительности) нелинейной характеристики F(x), то на выходе мы будем иметь ноль. Это участок 0...t1 на выходной характеристике.
Затем, часть входного сигнала x (участок t1...t2) попадает на линейно возрастающую часть нелинейной характеристики, что дает часть синуса на выходной характеристике (участок t1...t2).
И затем следующая часть входного сигнала попадает на горизонтальный участок F(x). Этот участок называется областью насыщения. Этот участок ограничивает дальнейший рост выходного сигнала.
Это участок t2...t3. Затем все повторяется циклически.

Мы рассмотрели только нелинейность, которая включена в состав системы. Теперь выходной сигнал y=F(x) с этого нелинейного звена должен быть подан на вход линейной части системы.

То есть нам необходимо каким-то образом представить данный выходной сигнал аналитической функцией, чтобы мы могли анализировать нашу систему. Вообще, выходной сигнал представляет собой сложную периодическую функцию, а такие функции удобно представлять в виде ряда Фурье

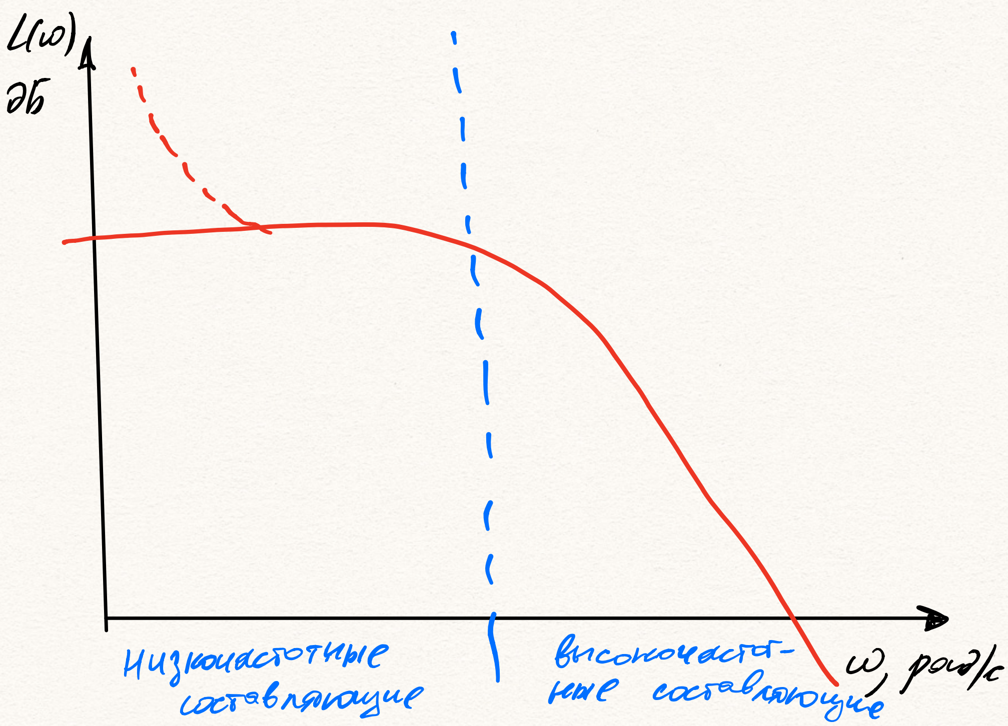
$$y = F(a \cdot \sin(\omega t)) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \cos(n\omega t) + B_n \cdot \sin(n\omega t) \right] \qquad (2)$$

где A_0, A_n и B_n – коэффициенты Фурье.

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi/\omega} F(a \cdot \sin(\omega t))\, dt; \\
A_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \cdot \sin(\omega t)) \cdot \cos(n\omega t)\, dt; \\
B_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \cdot \sin(\omega t)) \cdot \sin(n\omega t)\, dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Теперь давайте обратимся к линейной части системы.

К линейной части тоже есть определенные требования.
Линейная часть должна обладать свойством фильтра низких частот (ФНЧ).
То есть пропускать низкочастотные составляющие сложного гармонического сигнала и значительно ослаблять высокочастотные составляющие сложного гармонического сигнала.
Это возможно, если ЛАЧХ линейной части будет иметь следующий вид...

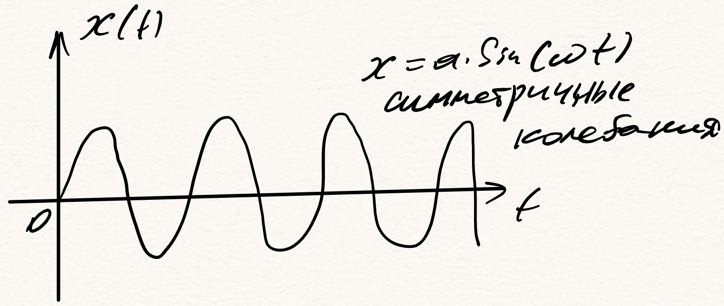


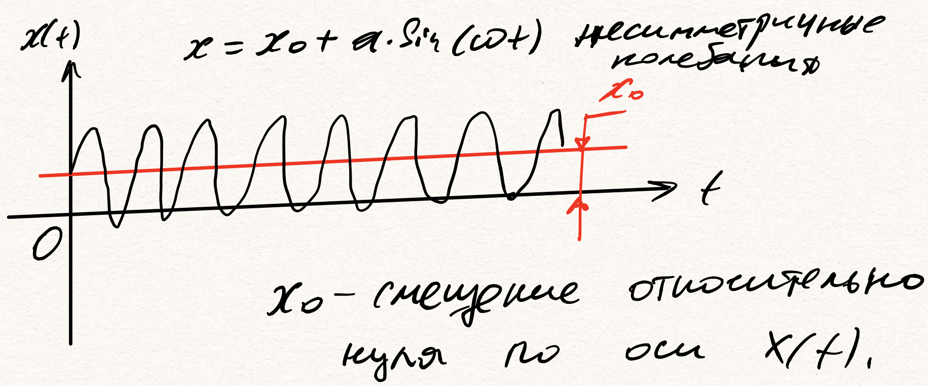
Отметим, что многие из реальных систем обладают свойством ФНЧ.

Если на вход такого линейного звена подать сложный гармонический сигнал, то это звено будет хорошо пропускать первую гармонику нелинейных колебаний у ослаблять все высшие гармоники, поэтому переменная x на входе нелинейного звена окажется близкой к синусоиде:

$$x \approx a \cdot \sin(\omega t)$$

Вообще, колебания могут быть симметричными и несимметричными. Мы рассматриваем, только симметричные колебания.





Таким образом мы подошли к рассмотрению метода гармонической линеаризации для самых простых систем, которые характеризуются следующими свойствами:
1) одна нелинейность;
2) нелинейность статическая;
3) линейная часть обладает свойством ФНЧ;
4) колебания симметричные.

Тогда ряд Фурье будет иметь следующий вид:

$$y = A_1 \cdot \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t)$$

Домножим и поделим слагаемые ряда на a

$$\frac{a}{a} y = \frac{A_1}{a} \cdot a \cdot \cos(\omega t) + \frac{B_1}{a} \cdot a \cdot \sin(\omega t)$$

Обозначим:

$$q(a) = \frac{B_1}{a} \; ; \quad q'(a) = \frac{A_1}{a} \; ;$$

Тогда

$$y = q'(a) \cdot a \cdot \cos(\omega t) + q(a) \cdot a \cdot \sin(\omega t)$$

Т.к. $X = a \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \quad X' = \frac{dx}{dt} = a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

если $\frac{d}{dt} = p$ – оператор дифференцирования

то $\quad pX = a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow \quad \frac{pX}{\omega} = a \cdot \cos(\omega t)$

Тогда получим:

$$y = q'(a) \cdot \frac{px}{\omega} + q(a) \cdot x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \cdot p\right] x} \qquad (4)$$

гармоническая линеаризация нелинейности.

где $q(a)$, $q'(a)$ – коэффициенты гармонической линеаризации

Для удобства обозначим $\psi = \omega t$, тогда коэфф.-ты гармонической линеаризации можно найти по формулам:

$$\boxed{\begin{cases} q(a) = \dfrac{1}{\pi a} \displaystyle\int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin(\psi)) \cdot \sin(\psi)\, d\psi \\[2ex] q'(a) = \dfrac{1}{\pi a} \cdot \displaystyle\int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin(\psi)) \cdot \cos(\psi)\, d\psi \end{cases}} \qquad (5)$$

Коэффициенты гармонической линеаризации можно найти разными способами.

Если нелинейность задана аналитически, то можно прямо по формулам (5) определения коэффициентов гармонической линеаризации выполнить вычисления.

Рассмотрим простой пример.

Пусть нелинейность задана выражением:

$$F(x) = k_1 x + k_3 x^3$$

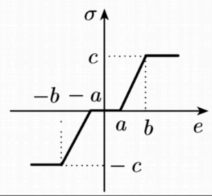
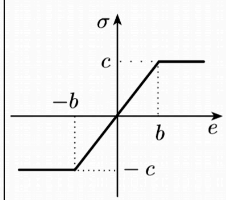
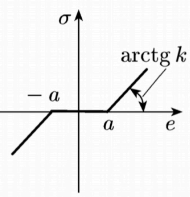
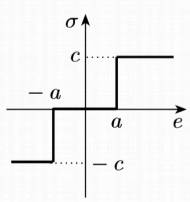
Тогда мы получим следующее значение коэффициента q(a), согласно [Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления.]:

$$q = k_1 + \frac{4}{\pi a}\int_0^{\pi/2} k_3 a^3 \sin^3\psi \cdot \sin\psi \, d\psi = k_1 + \frac{3}{4} k_3 a^2.$$

Такое решение очень хорошее, так как оно аналитическое и мы можем видеть как у нас будет зависит коэффициент q(a) от различных параметров нелинейности.
Более того, мы можем использовать алгебраические методы исследования свойств системы!
Но...
Порой найти аналитическое выражение для коэффициентов гармонической линеаризации интегрированием аналитической функции нелинейности не так просто.
Хотя все зависит от опыта.

Но, тем не менее, для типовых нелинейностей уже найденные аналитические зависимости для коэффициентов гармонической линеаризации [Ким Д. П. Теория автоматического управления, том 2], например,

Таблица 3.1. Коэффициенты гармонической линеаризации НЗ с однозначной характеристикой

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$q(A)=\frac{2c}{\pi(b-a)}\left[\arcsin\frac{b}{A}-\arcsin\frac{a}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right],\quad A\geqslant b$
2		$q(A)=\frac{2c}{\pi b}\left[\arcsin\frac{b}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}\right],\quad A\geqslant b$
3		$q(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{A}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right],\quad A\geqslant a$
4		$q(A)=\frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2},\quad A\geqslant a$

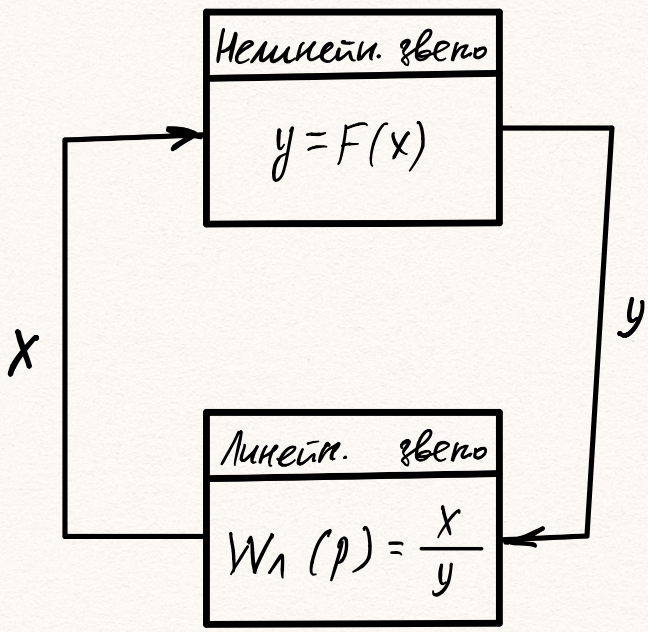
Если же нелинейность «нетиповая» и Вы сами затрудняетесь найти для неё аналитическое решение, то можно попробовать использовать системы компьютерной алгебры или выполнить численное интегрирование и получить графики зависимостей q(a) и q'(a). Эти графики будут очень полезны при поиске автоколебаний у системы.

ДГТУ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Алгебраический способ определения симметричных автоколебаний

Пусть мы имеет обобщенную схему системы управления с одним нелинейным звеном, которое является статической нелинейностью.



Пусть линейная часть имеет следующую передаточную функцию (ПФ) и обладает свойством фильтра ФНЧ.

$$W_л(p) = \frac{x}{y} = \frac{-R(p)}{Q(p)}$$

Уравнения линейной части системы и нелинейного звена будут следующие:

$$Q(p) \cdot x = -R(p) \cdot y \quad , \quad y = F(x) \quad , \quad p = \frac{d}{dt}.$$

оператор дифф-ия

Тогда:

$$Q(p)\cdot x + R(p)\cdot y = 0 \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Q(p)\cdot X + R(p)\cdot F(X) = 0} \qquad (2)$$

т.е. решение ищется в приближённо в форме:

$$X = a\cdot \sin(\omega t) \qquad (3)$$

с двумя неизвестными a и ω.

После гармонической линеаризации нелинейного звена, получим

$$\boxed{F(X) = \left[\, q(a) + \frac{q'(a)}{\omega}\cdot p \right]\cdot X} \qquad (4)$$

Подставим (4) в (2) и получим:

$$Q(p)\cdot X + R(p)\left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega}\cdot p\right]X = 0 \qquad (5)$$

$$\left\{ Q(p) + R(p)\left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \cdot p \right] \right\} x = 0 \quad (6)$$

Запишем характеристическое ур-ие гармонически линеаризированной системы:

$$\boxed{Q(\lambda) + R(\lambda)\left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \lambda \right] = 0} \quad (7)$$

Периодическое решение (3) уравнения (5) соответствует паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ характеристического уравнения (7). Поэтому для отыскания этого решения подставим в него $\lambda = j\omega$.

Тогда получим

$$Q(j\omega) + R(j\omega) \cdot \left[q(a) + j q'(a) \right] = 0 \quad (8)$$

Выделим в уравнении (8) вещественную и мнимую части в виде:

$$X(a,\omega) + jY(a,\omega) = 0 \quad (10)$$

В результате получим систему из двух алгебраических уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} X(a,\omega) = 0 \\ Y(a,\omega) = 0 \end{cases}} \quad (11)$$

Решая совместно уравнения системы (11) определим искомую амплитуду а и частоту w колебаний периодического решения (3).

Найденое периодическое движение еще не является автоколебанием, так как оно может затухать или наоборот его амплитуда может бесконечно увеличиваться. То есть необходимо еще доказать, что найденое периодическое решение устойчивое.

Для проверки устойчивости колебательного решения необходимо выполнить два критерия.

$$\boxed{\left(\frac{\partial X}{\partial a}\cdot\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^{*}-\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\cdot\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^{*}>0} \quad (12)$$

* означает, что после взятия частной производной от X или Y по a или ω необходимо подставить исходные значения.

В дополнение к этому критерию нужно потребовать, чтобы в характеристическом уравнении (7) все остальные корни (кроме проверенной пары чисто мнимых корней) имели отрицательные вещественные части. Для этого необходимо чтобы многочлен

$$\boxed{\frac{Q(\lambda)+R(\lambda)\cdot\left(q+\frac{q'}{\omega}\lambda\right)}{\lambda^2+\omega^2}} \quad (13)$$

удовлетворял критерию Гурвица (или Михайлова или корневому критерию).

В случае систем, порядок которых не выше четвертого, условие (13) можно не проверять, а достаточно потребовать лишь положительности коэффициентов характеристического уравнения (7).

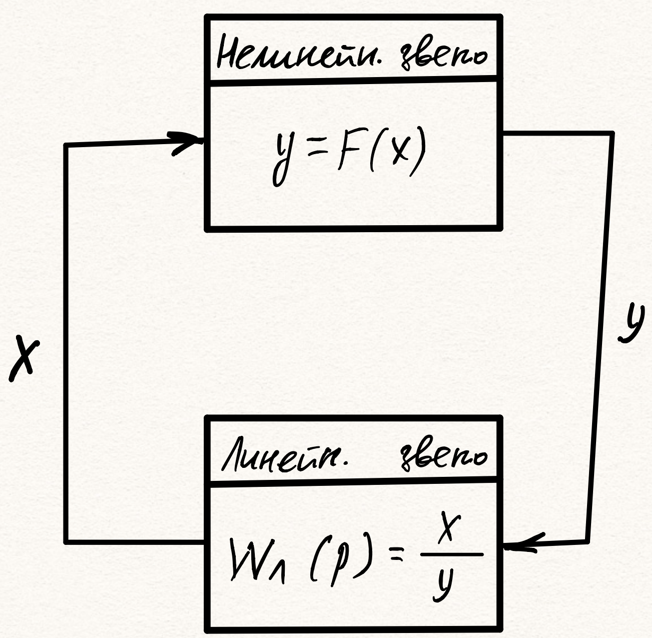
ДГТУ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Частотный способ определения симметричных автоколебаний

Пусть мы имеем те же условия, что и ранее:
1) одна нелинейность;
2) нелинейность статическая;
3) линейная часть обладает свойством ФНЧ;
4) колебания симметричные.

Пусть мы имеет обобщенную схему системы управления с одним нелинейным звеном, которое является статической нелинейностью.



Как и ранее, решение будем искать в виде:

$$x = a \cdot \sin(\omega t) \qquad (1)$$

где a, ω – неизвестные параметры (амплитуда и частота колебаний).

Пусть задана нелинейность в виде

$$y = F(x)$$

Передаточная функция линейной части

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

Выполнив гармоническую линеаризацию нелинейности F(x), получим:

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \cdot x$$

Тогда можно записать передаточную функцию нелинейной части:

$$W_н(a, p) = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p$$

Теперь перейдем к частотным передаточным функциям, выполнив формальную подстановку p = jw.

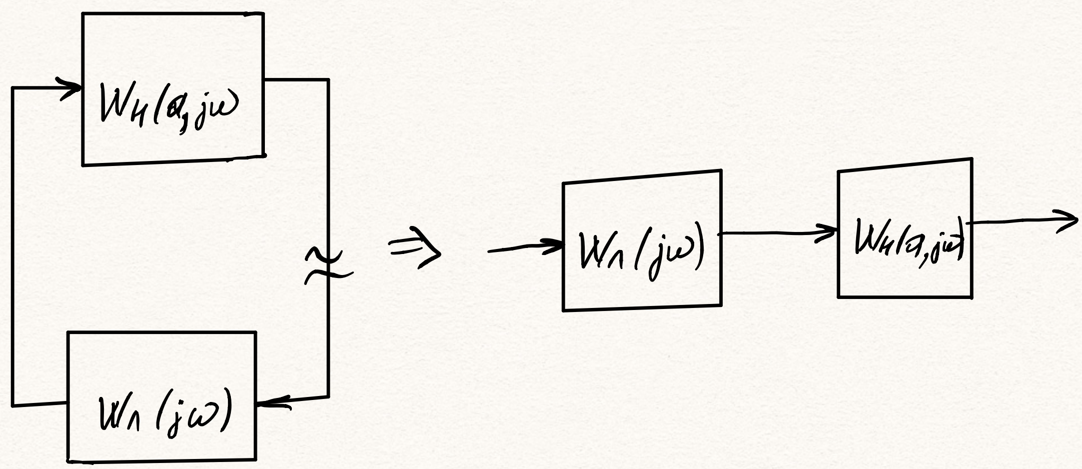
$$W_л(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

$$W_н(a, j\omega) = q(a) + \frac{q'(a)}{\cancel{\omega}} j\cancel{\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$W_н(a, j\omega) = q(a) + jq'(a)$$

Разомкнем нелинейную систему



Тогда амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы будет определяться как

$$\boxed{W(j\omega) = W_л(j\omega) \cdot W_н(a, j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \cdot \left[q(a) + j q'(a) \right]}$$

АФЧХ разомкнутой цепи системы

Как известно, периодическое решение линеаризованной системы получается в том случае, если если у характеристического уравнения замкнутой системы имеется пара чисто мнимых корней. Тогда, согласно критерию устойчивости Найквиста, наличия у системы пары чисто мнимых корней, соответствует прохождению годографа АФЧХ разомкнутой системы через точку (-1, j0) или просто -1.

Тогда периодическое решение (1) можно найти из равенства

см.
↓

$$W(j\omega) = -1$$

$$W_л(j\omega) \cdot W_н(a, j\omega) = -1$$

$$W_л(j\omega) = -\frac{1}{W_н(a, j\omega)}$$

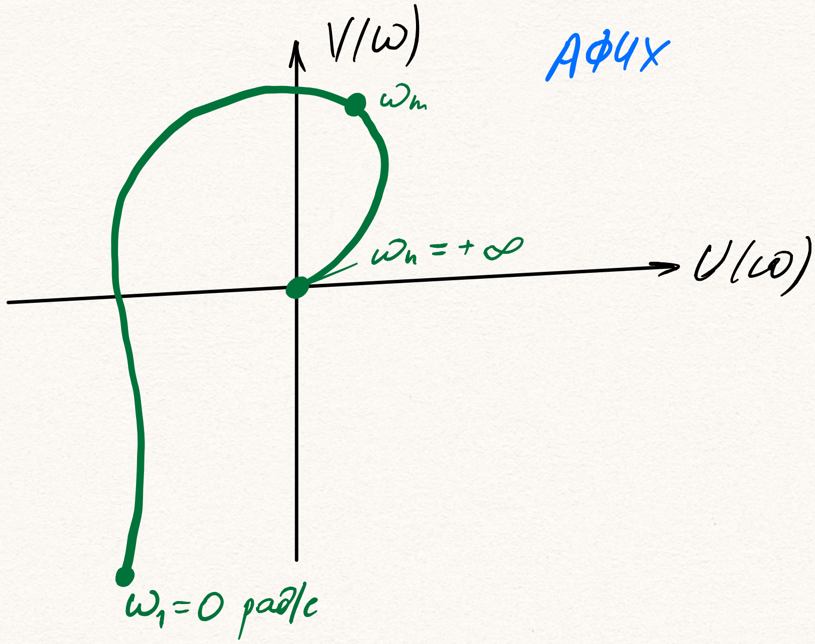
$$\boxed{W_л(j\omega) = -\frac{1}{q(a) + jq'(a)}} \qquad (2)$$

Уравнение (2) позволяет определить искомые параметры колебаний — амплитуду a и частоту w. Это уравнение можно решить графически, для чего необходимо перейти к алгебраической форме частотной передаточной функции линейной части.

$$\boxed{W_л(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)}$$

алгебраическая форма частотной
ПФ линейной части системы

На комплексной плоскости (U, V) вычерчивается годограф АФЧХ линейной части системы...

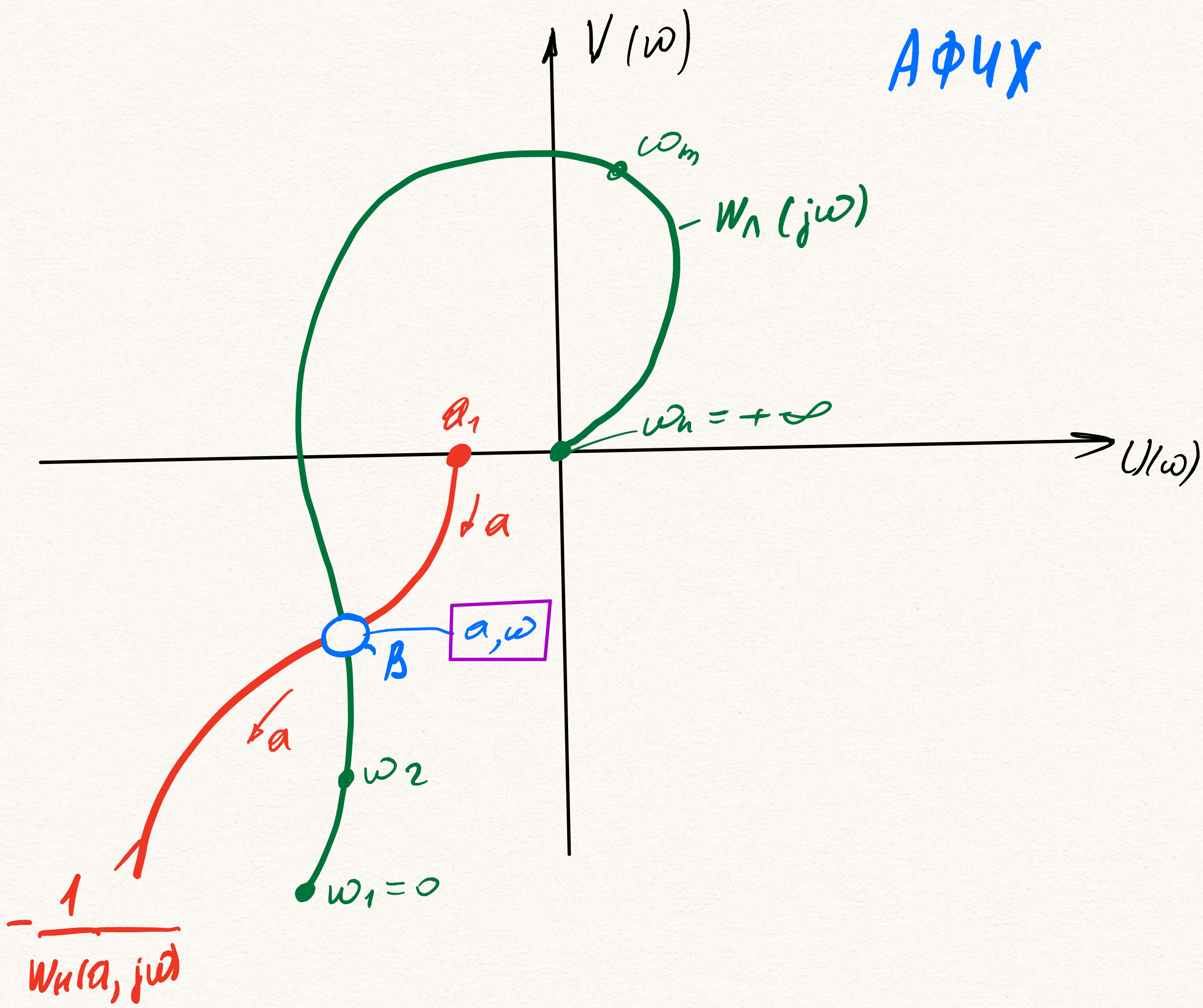


Далее, добавляем на комплексную плоскость обратную АФЧХ нелинейного звена со знаком «минус», то есть

$$-\frac{1}{W_н(a, j\omega)}$$

см.

↓



На пересечении двух годографов - точка В, определяются параметры периодического решения — амплитуда а и частота w.

Частота w определяется по годографу Wл(jw), амплитуда а определяется по годографу -1/Wн(а, jw).

Также как в случае с алгебраическим способом нахождения автоколебаний, в частотном способе тоже существует критерий проверки устойчивости найденного периодического решения — устойчивости колебаний.

Этот критерий можно сформулировать так: **периодическое решение является устойчивым (в системе наблюдаются автоколебания), если положительный отчет амплитуды a (другими словами увеличение амплитуды a) вдоль годографа -1/Wн(a, jw) будет направлен изнутри вовне через годограф Wл(jw).**

То есть на рисунке выше показан случай устойчивого колебательного движения - автоколебания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ, КОТОРЫЕ ИСПОЛЬЗОВАЛИСЬ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ЛЕКЦИЙ

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов, М.: Высш. шк., 1986. - 416 с.

2. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: Учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. - М.: Высш. шк., 1990. - 607 с.

3. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие. - М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 256 с.